Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
11. Mai 2007

4. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

In der Vorlesungen wurden Drehungen dadurch eingeführt, daß sie die Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in die gestrichene Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ überführen.

a) Für eine bestimmte Drehung $\mathbf{D}_1$ seien die Komponenten der neuen Basis bzgl. der alten in den folgenden Spaltenvektoren zusammengefaßt:

$$\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t, \mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^t, \mathbf{e}'_3 = (0,0,1)^t. \tag{1}$$

Gegeben sei der Vektor $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Wie lauten die Komponenten des gedrehten Vektors $D\mathbf{a}$ bzgl. der ungestrichenen und der gestrichenen Basis (aktiver Standpunkt). Wie lauten die Komponenten von $\mathbf{a}$ bzgl. der gestrichenen Basis.

Gegeben sei nun die folgende Drehmatrix:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) & \frac{1}{4}(2-\sqrt{2}) & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}(2-\sqrt{2}) & \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}) & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

b) Wie lauten die Komponenten der gedrehten Basisvektoren bzgl. der ungestrichenen Basis.

c) Unterziehen Sie den Vektor $\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ wieder einer aktiven Drehung. Transformieren Sie andererseits seine Komponenten auf die neue Basis.

d) Führen Sie nun die Drehungen $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$ hintereinander aus. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, daß es auf die Reihenfolge ankommt.

Aufgabe 2 : *Dreiecksungleichung (mündlich)*

Sein $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ und $||\mathbf{a}|| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ die induzierte Norm des Skalarproduktes $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}|| \cos\varphi$ (φ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$). Zeigen sie mit Hilfe der Schwarzen Ungleichung

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq ||\mathbf{a}||\ \ ||\mathbf{b}||$$

die Dreiecksungleichung

$$||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||.$$

Bitte wenden $\longrightarrow$

Aufgabe 3 : *Drehmatrizen (mündlich)*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(a) Welche Drehung wird durch die Marix A vermittelt?

(b) Wie lauten die Vektoren $\mathbf{a} = (1, -2, 1), \mathbf{b} = (3, 5, -4)$ nach einer Drehung.

(c) Zeichen Sie die Vektoren vor und nach der Drehung.

(d) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vor und nach der Drehung.

Aufgabe 4 : *Matrizen (mündlich)*

Bilden Sie das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und prüfen Sie das Ergebnis durch ausmultiplizieren direkt nach.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 703, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708