Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel 15. Mai 2007

5. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *Trägheitstensor (schriftlich)*

Wir betrachten einen starren Körper, der aus n fest verbundenen Massepunkten zusammengesetzt ist. Dieser rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$, das heißt, er rotiert entgegen dem Uhrzeigersinn um die durch die Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ definierte Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega = |\boldsymbol{\omega}|$. Der Gesamtdrehimpuls ist dann gegeben als

$$\mathbf{L} = \sum_{\nu=1}^{n} m^\nu \mathbf{r}^\nu \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^\nu), \tag{1}$$

wobei $\mathbf{r}^\nu = (x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu)^T$ der Ort des ν-ten Massepunktes ist. $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ist gerade die Geschwindigkeit am Ort $\mathbf{r}$. In Analogie zum Impuls eines Teilchens $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ kann Gleichung (1) auch geschrieben werden als

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{\Theta}$ den Trägheitstensor.

(a) Zeigen Sie durch den Vergleich der Gleichungen (1) und (2), daß die Komponenten des Trägheitstensors gegeben sind durch

$$\Theta_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} m^\nu \left((\mathbf{r}^\nu)^2 \delta_{ij} - x_i^\nu x_j^\nu \right) \qquad \text{für } i,j = 1,2,3. \tag{3}$$

Wir betrachten nun einen starren Körper, bestehend aus vier miteinander verbundenen Massepunkten. Die Massenpunkte werden als Abstand vom Koordinatenursprung mit Hilfe der folgenden Vektoren beschrieben:

$$\mathbf{r}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha \mathbf{e}_1 - \alpha \mathbf{e}_2), \ \ \mathbf{r}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha \mathbf{e}_1 + \alpha \mathbf{e}_2), \tag{4}$$

$$\mathbf{r}^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}((1-\alpha)\mathbf{e}_1 + (1-\alpha)\mathbf{e}_2), \ \ \mathbf{r}^4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}((1-\alpha)\mathbf{e}_1 + (1-\alpha)\mathbf{e}_2), \tag{5}$$

wobei mit $\mathbf{e}_i$ die Vektoren der Standardbasis bezeichnet sind.

(b) Bestimmen Sie alle Komponenten des Trägheitstensors, wenn alle Massenpunkte die Masse m haben.

(c) Betrachten Sie die folgenen Winkelgeschwindigkeiten: $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, $\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$. Für welche Winkelgeschwindigkeiten liegt $\boldsymbol{\omega}$ parallel zum Drehimpuls $L_i = \Theta_{ij}\omega_j$?

(d) Für welche Werte von α wird der Trägheitstensor diagonal (d.h. seine Komponenten außerhalb der Diagonalen verschwinden)?

Jetzt wird der starre Körper um $\pi/4$ gedreht. Die Vektoren $\mathbf{r}^\nu$ schreiben sich nach der Drehung als:

$$\mathbf{r}'^1 = \alpha \mathbf{e}_1, \ \ \mathbf{r}'^2 = -\alpha \mathbf{e}_1, \ \ \mathbf{r}'^3 = (1-\alpha)\mathbf{e}_2 \ \mathbf{r}'^4 = -(1-\alpha)\mathbf{e}_2 \tag{6}$$

(e) Bestimmen Sie erneut alle Komponenten des Trägheitstensors. Setzen Sie für α den in (d) bestimmten Wert ein. Was beobachten Sie?

Bitte wenden ⟶

Aufgabe 2 : *Abbildungen im Raum der Polynome (mündlich)*

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathcal{P}^n[-1,1]$ der Polynome bis zum Grad n auf dem Intervall $[-1,1]$. (vgl. 1. und 3. Übungsblatt)

Auf diesem Raum definieren wir die Abbildungen

$$(\mathbf{P}p)(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) \qquad \text{(Differentiationsoperator) und} \tag{7}$$

$$(\mathbf{M}p)(x) := \begin{cases} xp(x) & \text{für } p(x) \in \mathcal{P}^{n-1}[-1,1] \\ 0 & \text{für } p(x) \text{ vom Grad } n \end{cases} \qquad \text{(Multiplikationsoperator).} \tag{8}$$

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildungen $\mathbf{P}$ und $\mathbf{M}$ linear sind.

Ein Tensor $\mathbf{A}$ ist durch seine Wirkung auf eine Basis $\{e_i\}$ in der folgenden Art vollständig bestimmt:

$$\mathbf{A}e_j = e_i A_{ij}. \qquad \text{für } j = 1,2,3. \tag{9}$$

Die A_{ij} sind die Koeffizienten und können in Matrixform dargestellt werden.

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellungen der beiden Operatoren $\mathbf{P}$ und $\mathbf{M}$ bezüglich der Standardbasis $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

(c) Berechnen Sie den Kommutator $[\mathbf{P}, \mathbf{M}] = \mathbf{PM} - \mathbf{MP}$ nach der Definition der beiden Operatoren und in der Matrixdarstellung.

Aufgabe 3 : *Determinante (mündlich)*

Betrachten Sie die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinate der Matrix B.

(Hinweis: Es ist einfacher zunächst die Determinante von BB^T zu bestimmen.)

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 703, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708