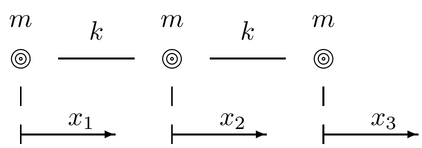
Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
24. Mai 2007

6. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *Schwingungsfrequenzen eines Moleküls (schriftlich)*
Ein einfaches Modell für ein dreiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung dreier Massepunkte, die durch masselose Federn miteinander verbunden sind. Berechnen Sie die Eigenschwingungen des Systems für den Fall gleicher Massen m und gleicher Federkonstanten k.



Hinweis:
Zeigen Sie, daß Sie mit dem Ansatz $x_j = A_j \sin(\omega t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} = -kx_1 + kx_2, \tag{1}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2} = kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \tag{2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_3}{\mathrm{d}t^2} = kx_2 - kx_3 \tag{3}$$

ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie dessen Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren. Diskutieren Sie die 3 Eigenschwingungen.

Aufgabe 2 : *Legendrepolynome als Eigenvektoren (mündlich)*
Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathcal{P}^n[-1,1]$ der Polynome bis zum Grad n auf dem Intervall $[-1,1]$. Auf diesem Raum definieren wir die Abbildung

$$(\mathbf{L}p)(x) := \left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] p(x). \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mathbf{L}$ linear ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Legendrepolynome $P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(x^2-1)^k\right]$ für $k = 0, \ldots .n$ Eigenvektoren von $\mathbf{L}$ sind (d.h. es gilt $\mathbf{L}P_k = \lambda_k P_k$). Berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte λ_k.

Hinweis:
Zeigen Sie zunächst, dass

$$(xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$$

gilt.

Bitte wenden ⟶

Aufgabe 3 : *Trägheitstensor II (mündlich)*
Stellen Sie sich einen starren Körper, bestehend aus vier miteinander verbundenen Kugeln vor. Die Massen der Kugeln sollen viel grösser sein als die der Verbundungsstücke, so dass die Masse der Verbindungen vernachlässigt werden kann. Außerdem sollen die Kugelmasse in je einem Punkt konzentriert sein. Die Massenpunkte werden als Abstand vom Koordinatenursprung mit Hilfe der folgenden Vektoren beschrieben:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2}(\alpha\mathbf{e}_1 + \sqrt{2}\alpha\mathbf{e}_2 - \alpha\mathbf{e}_3), \;\; \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(-\alpha\mathbf{e}_1 - \sqrt{2}\alpha\mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}_3), \\
\mathbf{r}_3 &= \frac{1}{2}(-(1-\alpha)\mathbf{e}_1 + \sqrt{2}(1-\alpha)\mathbf{e}_2 + (1-\alpha)\mathbf{e}_3), \;\; \mathbf{r}_4 = \frac{1}{2}((1-\alpha)\mathbf{e}_1 - \sqrt{2}(1-\alpha)\mathbf{e}_2 - (1-\alpha)\mathbf{e}_3)
\end{aligned}$$

Wobei $\mathbf{e}_i$ die Vektoren der Standardbasis bezeichnen.

(a) Bestimmen Sie alle Komponenten des Trägheitstensors, wenn alle Massenpunkte dieselbe Masse m haben.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Trägheitstensors für den Fall, dass $\alpha = 1/2$ ist.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr
- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html
- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 703, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708
- **Übungsschein:** Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedern sich in drei Teile: Mindestens 50 Prozent der schriftlichen Übungspunkte (Einzelabgabe). Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung sinnvoll bearbeitete Aufgaben an. In der Übung besteht die Möglichkeit die angekreuzten Aufgaben vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen 50 Prozent der mündlichen Aufgaben angekreuzt und zwei Aufgaben vorgerechnet werden. Am Ende des Semesters wird es eine Klausur geben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mehr als 50 Prozent erreicht werden.Werden 30 Prozent erreicht besteht die Möglichkeit an einer Nachklausur bzw. an einer Rücksprache teilzunehmen.