Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
31. Mai 2007

7. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *Visualisierung von Tensoren (schriftlich)*
Betrachten Sie die folgende Darstellung eines Tensors zweiter Stufe (z.B. des Trägheitstensors).

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^{-2}+b^{-2} & a^{-2}-b^{-2} & 0 \\ a^{-2}-b^{-2} & a^{-2}+b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2c^{-2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

(a) Diagonalisieren Sie den Tensor, indem Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren berechnen.

(b) Der Tensor kann durch eine orthogonale Transformation diagonalisiert werden, dh. $T^{diag}_{nm} = T_{ij}D_{ni}D_{mj}$ bzw. $\mathbf{T}^{diag} = \mathbf{DTD}^T$. Wie lautet hier die Matrix $\mathbf{D}$?

Ein Tensor $\mathbf{T}$ ist mit der quadratische Form

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{T}\mathbf{x} = x_i T_{ij} x_j$$

verknüpft. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ |[1]. Die quadratischen Form ihrerseits beschreibt durch die Menge $F = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | Q(\mathbf{x}) = 1\}$ eine zweidimensionale Fläche F, so dass der Tensor als eine solche visualisiert werden kann (vgl. Vorlesung).

(c) Geben Sie die quadratische Form für den Tensor $\mathbf{T}$ aus Glg. (1) in der Standardbasis und in der Eigenvektorbasis explizit an.

(d) Um nun diese Fläche graphisch darzustellen, wählt man eine geeignete Parametrisierung, dh. Funktionen von zwei Parametern ϕ, ϑ. In der Eigenvektorbasis wählt man folgende Parametrisierung $\hat{x}_1 = a\sin(\vartheta)\cos(\phi), \hat{x}_2 = b\sin(\vartheta)\sin(\phi), \hat{x}_3 = c\cos(\vartheta)$ ($\phi \in [0, 2\pi), \vartheta \in (0, \pi)$). Zeigen Sie, dass für alle ϕ, ϑ die Gleichung $Q = 1$ erfüllt ist.

(e) Verwenden Sie diese Parametrisierung und stellen den Tensor für die Werte $a = 4, b = 2, c = 1$ graphisch dar.
(Hinweis: Hierzu kann z.B. das Computeralgebraprogramm Mathematica genutzt werden. Verwenden Sie für die graphische Darstellung mit Mathematica den Befehl ParametricPlot3D in der Notation:
$ParametricPlot3D[\{x[s,t], y[s,t], z[s,t]\}, \{s, s_{anfang}, s_{ende}\}, \{t, t_{anfang}, t_{ende}\}]$)

(f) Eine andere Fläche wird durch die folgende Gleichung

$$\frac{a^2(x-y)^2 + b^2(x+y)^2}{2a^2b^2} = 1$$

beschrieben. Überführen Sie die Gleichung in die kanonische Form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{T}\mathbf{x} = 1$ und diagonalisieren Sie die Matrix $\mathbf{T}$.

(g) Welche Fläche stellt die Gleichung in (f) dar?

Bitte wenden ⟶

[1] vgl.: Seien $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i}\}$ zwei ONBs und $\mathbf{D}$ eine orthogonale Transformation, so daß $\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{i} = D_{ij}\mathbf{e}_j$ gilt. Dann ergibt sich

$$Q(\mathbf{x}) = x_i T_{ij} x_j = x_k \delta_{ki} T_{ij} \delta_{jl} x_l = x_k D^{-1}_{km} D_{mi} T_{ij} D^{-1}_{jn} D_{nl} x_l = \hat{x}_m \hat{T}_{mn} \hat{x}_n.$$

Hierbei wurden die Eigenschaften

$$\delta_{ki} = D_{km} D^{-1}_{mi} = D_{km} D_{im}, \qquad \hat{x}_i = D_{ij} x_j \quad \text{und} \quad \hat{T}_{nm} = T_{ij} D_{ni} D_{mj}$$

verwendet.

Aufgabe 2 : *Skalarfelder, Zylinder-,Kugelkoordinaten (mündlich)*
Stellen Sie folgende Skalarfelder $\phi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ in Zylinder- und in Kugelkoordinaten dar und kommentieren Sie das Ergebnis.

$$\phi_1(x,y,z) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{2}$$

$$\phi_2(x,y,z) = -\gamma \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{3}$$

$$\phi_3(x,y,z) = x \tag{4}$$

$$\phi_4(x,y,z) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2} \tag{5}$$

Zusatz: Finden Sie ein Koordinatensystem, das für ϕ_4 besser geeignet ist.

Aufgabe 3 : *Vektorfelder, Zylinder-,Kugelkoordinaten (mündlich)*

(a) Berechnen Sie die Koordinatenbasis für Kugelkoordinaten (vgl. Vorlesung).

(b) Geben Sie die folgenden Vektorfelder $\mathbf{v}_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in Zylinderkoordinaten an

$$\mathbf{v_1}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\beta x - \alpha y)\mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\alpha x + \beta y)\mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v_2}(x,y,z) = \alpha \mathbf{e}_x + \alpha \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z.$$

Hinweis: Die Basisvektoren müssen an die Zylinderkoordinaten angepasst werden.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 703, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708

- **Übungsschein:** Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedern sich in drei Teile: Mindestens 50 Prozent der schriftlichen Übungspunkte (Einzelabgabe). Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung sinnvoll bearbeitete Aufgaben an. In der Übung besteht die Möglichkeit die angekreuzten Aufgaben vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen 50 Prozent der mündlichen Aufgaben angekreuzt und zwei Aufgaben vorgerechnet werden. Am Ende des Semesters wird es eine Klausur geben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mehr als 50 Prozent erreicht werden.Werden 30 Prozent erreicht besteht die Möglichkeit an einer Nachklausur bzw. an einer Rücksprache teilzunehmen.