Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
22. Juni 2007

9. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *vollständiges Differential (schriftlich)*

(a) Bilden Sie das vollständige Differential der folgenden Skalarfelder $\phi_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\phi_1(x,y,z) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{1}$$

$$\phi_2(x,y,z) = -\gamma \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{2}$$

$$\phi_3(x,y,z) = x \tag{3}$$

$$\phi_4(x,y,z) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2} \tag{4}$$

(b) Es ist das Skalarfeld U gegeben:

$$U(x,y,t) = x + e^{-ay}\cos(\omega t).$$

Bestimmen Sie das vollständige Differential von U. Es ist die folgende Bahnkurve gegeben

$$\mathbf{r}(t) = a(\sin(\omega t), t/t_0)^T.$$

Wie sieht die totale Zeitableitung von U aus, dh. $\frac{dU(\mathbf{r(t)},t)}{dt}$ aus? Diskutieren Sie den Fall $t \gg t_0$ für $a > 0$.

(c) Anwendung aus der Thermodynamik:
Es sei das vollständige Differential der inneren Energie $U(S,V,N_{1\ldots\alpha})$ als Funktion der Variablen Entropie, Volumen und Teilchenzahl gegeben:

$$dU = TdS - pdV + \sum_{j=1}^{\alpha} \mu_j dN_j.$$

Nutzen Sie das Wissen aus der Vorlesung, um einen direkten Zusammenhang zwischen den Größen Temperatur T, Druck p und chemisches Potential μ_j einerseits und U andererseits herzustellen.

Aufgabe 2 : *Ellipsoidkoordinaten (mündlich)*
Wir definieren die Ellipsoidkoordinaten (R,φ,ϑ) durch

$$x = aR\cos\varphi\sin\vartheta, \tag{5}$$

$$y = bR\sin\varphi\sin\vartheta, \tag{6}$$

$$z = cR\cos\vartheta, \tag{7}$$

wobei (x,y,z) die kartesischen Koordinaten bezeichnen und $\phi \in [0,2\pi), \vartheta \in [0,\pi), R \geq 0$.

(a) Zeigen Sie, daß $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = R^2$ gilt.

(b) Denken Sie über die Bedeutung von (R,φ,ϑ) nach.

(c) Berechnen Sie die Koordinatenbasis für Ellipsoidkoordinaten und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Koordinatenbasis für Kugelkoordinaten.

(d) Vergleichen Sie die Skalarprodukte der Basisvektoren für Ellipsoidkoordinaten und die Skalarprodukte der Basisvektoren für Kugelkoordinaten.

Aufgabe 3 : *Bewegung im Schwerefeld (mündlich)*
Gegeben ist die Flugbahn eines Teilchens auf der Erde

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ v_z t - g t^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

wobei $v_x, v_z \geq 0$ die Geschwindigkeitskomponenten in x- bzw. z-Richtung sind, $g > 0$ die Fallbeschleunigung ist, und t die Zeit bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$.

(b) Berechnen Sie die Weglänge $s(t)$ für den Fall $v_z = 0$. Was passiert für $v_x \longrightarrow 0$?
Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung des Integrals eine Integraltafel. (Alternativ kann das auftretende Integral durch geeignete Substitution mit $\sinh x$ *gelöst werden.)*

(c) Parametrisieren Sie $\mathbf{r}$ durch den in x-Richtung zurückgelegten Weg.

(d) Wir legen nun unser Koordinatensystem in den Brennpunkt F der Parabel. So kann die Parabel in der Form

$$\tilde{y} = 0 \qquad \tilde{z} = a\tilde{x}^2 - \frac{1}{4a}$$

dargestellt werden. Geben Sie die notwendige Koordinatentransformation (Verschiebung des Koordinatenursprungs) an und bestimmen Sie a. Stellen Sie die Parabel in Kugelkoordinaten dar, d.h., berechnen Sie $R(\vartheta)$ für die Bahn.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 702, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708

- **Übungsschein:** Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedern sich in drei Teile: Mindestens 50 Prozent der schriftlichen Übungspunkte (Einzelabgabe). Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung sinnvoll bearbeitete Aufgaben an. In der Übung besteht die Möglichkeit die angekreuzten Aufgaben vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen 50 Prozent der mündlichen Aufgaben angekreuzt und zwei Aufgaben vorgerechnet werden. Am Ende des Semesters wird es eine Klausur geben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mehr als 50 Prozent erreicht werden.Werden 30 Prozent erreicht besteht die Möglichkeit an einer Nachklausur bzw. an einer Rücksprache teilzunehmen.

- **Klausurtermin:** Die Klausur findet am 20.7.2007 um 14.00 Uhr im H01058 statt.