# 2. Vektoralgebra

## 2.1. Abstrakte Definition eines Vektorraumes

• **Def.:** Eine Menge $V$ von Elementen (Vektoren) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \ldots \in V$ heißt reeller/komplexer Vektorraum, falls eine Addition (+) und eine skalare Multiplikation mit $p, q \in \mathbb{R} / \mathbb{C}$ erklärt sind, die folgende Axiome erfüllen:

$$\left.\begin{array}{lll} (A1) & \underline{a} + \underline{b} \in V & \text{Abgeschlossenheit} \\ (A2) & \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{A} & \text{Kommutativität} \\ (A3) & \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} & \text{Assoziativität} \\ (A4) & \underline{a} + \underline{0} = \underline{a} & \text{neutrales Element („Nullvektor")} \\ (A5) & \underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0} & \text{inverses Element} \end{array}\right\} \text{abelsche Gruppe} \qquad (2.1)$$

$$\begin{array}{lll} (M1) & p\underline{a} \in V & \text{Abgeschlossenheit} \\ (M2) & (pq)\underline{a} = p(q\underline{a}) & \text{Assoziativität} \\ (M3) & (p+q)\underline{a} = p\underline{a} + q\underline{a} & \text{Distributivität bzgl. Zahlen} \\ (M4) & p(\underline{a} + \underline{b}) = p\underline{a} + p\underline{b} & \text{Distributivität bzgl. Vektoren} \\ (M5) & 1\underline{a} = \underline{a} & \text{neutrales Element} \end{array}$$

• **Bsp:** (i) $\mathbb{R}^n$, $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ „n-Tupel", $a_i \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a} + \underline{b} := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \\ p\,\underline{a} := (pa_1, \ldots, pa_n), \quad p \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \qquad (2.2)$$

→ Darstellung von Vektoren bzgl. einer Basis

(ii) Polynome n-ten Grades:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \longrightarrow (n+1)$-Tupel

→ Taylorentwicklung

→ Legendrepolynome