Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

16. Mai 2007

Prof. Dr. A. Knorr
Dipl.-Phys. Frank Milde,
Dipl.-Phys. Marten Richter

www.itp.tu-berlin.de/tfp07.html

4. Übungsblatt zur Theoretischen Festkörperphysik

Abgabe: bis Dienstag 22.05.2007 10:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 7 (20 Punkte): *Plasmonen*

In dieser Aufgabe sollen die kollektiven Anregungen des Elektronengases untersucht werden. Dabei soll eine Gleichung zur Bestimmung der Dispersionsrelation $\omega_{Pl}\left(\underline{q}\right)$ der neuen Quasiteilchen, Plasmonen genannt, gefunden werden.

(a) Wiederholen Sie zunächst, dass sich die Elektronendichte des homogenen Elektronengases ρ darstellen läßt als:

$$\rho\left(\underline{r},t\right) = -\frac{e}{V}\sum_{\underline{Q}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho_{\underline{Q}}\left(\omega\right) e^{-i\omega t + i\underline{Q}\cdot\underline{r}} \qquad \text{mit} \qquad \rho_{\underline{Q}} = \sum_{\underline{k},s}\left\langle a^\dagger_{\underline{k}-\underline{Q},s} a_{\underline{k},s}\right\rangle.$$

(b) Stellen Sie nun die *Heisenberg*-Bewegungsgleichung für $\left\langle a^\dagger_{\underline{k}-\underline{Q},s} a_{\underline{k},s}\right\rangle$ auf. Nutzen Sie dazu den aus der VL bekannten Elektronengas-Hamiltonian:

$$\hat{H} = \underbrace{\sum_{\underline{k},s}\varepsilon_{\underline{k},s} a^\dagger_{\underline{k},s} a_{\underline{k},s}}_{\hat{H}_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\substack{\underline{k}_1,\underline{k}_2,\underline{q}\\ s_1,s_2}} V_{\underline{q}} a^\dagger_{\underline{k}_1+\underline{q},s_1} a^\dagger_{\underline{k}_2-\underline{q},s_2} a_{\underline{k}_2,s_2} a_{\underline{k}_1,s_1}}_{\hat{H}_{el-el}} .$$

Tipp: $\left[\hat{H}_{el-el}, a^\dagger_{\underline{k}-\underline{Q},\lambda} a_{\underline{k},\lambda}\right] = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\underline{k}_2,\underline{q}\\ s}} V_{\underline{q}}\left(a^\dagger_{\underline{k}-\underline{Q}+\underline{q},\lambda} a^\dagger_{\underline{k}_2-\underline{q},s} a_{\underline{k}_2,s} a_{\underline{k},\lambda} + a^\dagger_{\underline{k}-\underline{Q},\lambda} a^\dagger_{\underline{k}_2-\underline{q},s} a_{\underline{k}-\underline{q},s} a_{\underline{k}_2,s}\right).$

(c) Um das auftretende Hierachieproblem (berechnete Erwartungswerte $\left\langle a^\dagger a\right\rangle$ koppeln an höhere Erwartungswerte $\left\langle a^\dagger a^\dagger a a\right\rangle$) zu lösen, führen Sie eine *Hartree-Fock*-Faktorisierung der 4er-Erwartungswerte durch.

(d) Vernachlässigen Sie zusätzlich Spinkohärenzen ($\delta_{s,\lambda}$) und nehmen Sie nur Erwartungswerte mit, die elektronische Dichten ($\sigma^{ss}_{\underline{k},\underline{k}} := \left\langle a^\dagger_{\underline{k},s} a_{\underline{k},s}\right\rangle$) und deren räumliche Fluktuationen beschreiben ($\sigma^{ss}_{\underline{k}-\underline{q},\underline{k}} := \left\langle a^\dagger_{\underline{k}-\underline{q},s} a_{\underline{k},s}\right\rangle$). Damit erhält man folgende Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} -i\hbar\partial_t \sigma^{ss}_{\underline{k}-\underline{Q},\underline{k}} = {} & \left(\varepsilon_{\underline{k}-\underline{Q},s} - \varepsilon_{\underline{k},s}\right)\sigma^{ss}_{\underline{k}-\underline{Q},\underline{k}} + V_{\underline{Q}}\left(\sigma^{ss}_{\underline{k},\underline{k}} - \sigma^{ss}_{\underline{k}-\underline{Q},\underline{k}-\underline{Q}}\right)\sum_{\underline{k}_2,s'}\sigma^{s's'}_{\underline{k}_2-\underline{Q},\underline{k}_2} \\ & + \sum_{\underline{q}} V_{\underline{q}}\left(\sigma^{ss}_{\underline{k}-\underline{q},\underline{k}-\underline{q}} - \sigma^{ss}_{\underline{k}-\underline{Q}+\underline{q},\underline{k}-\underline{Q}+\underline{q}}\right)\sigma^{ss}_{\underline{k}-\underline{Q},\underline{k}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Deuten Sie die einzelnen Terme.

Bitte Rückseite beachten!⟶

(e) In der VL wurde Gleichung (1) im Fourierraum analytisch gelöst:

$$1 = \frac{2V_{\underline{q}}}{\hbar} \sum_{\underline{k}} \frac{f_{\underline{k}-\underline{q}} - f_{\underline{k}}}{\omega_{\mathsf{Pl}}\left(\underline{q}\right) + \hbar^{-1}\left(\tilde{\varepsilon}_{\underline{k}-\underline{q}} - \tilde{\varepsilon}_{\underline{k}}\right)}, \tag{2}$$

wobei es sich bei $\tilde{\epsilon}$ um die renormalisierte Einteilchenenergie handelt. Um sich dieses Ergebnis zu veranschaulichen, plotten Sie mit einem Programm Ihrer Wahl (Gnuplot, Mathematica, Mathlab, etc.) die rechte Seite der Bestimmungsgleichung (2) für einen beliebigen, aber festen Wert $\underline{q}$ in Abhängigkeit von ω_{Pl}. Nehmen Sie dazu den eindimensionalen Spezialfall an ($\underline{k} = k$). Zusätzlich soll es sich im Nenner um die freien Teilchenenergien handeln $\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k$. Was bedeutet es also, die transzendente Gleichung (2) zu lösen und welche Lösung ist die kollektive Schwingungsmode?