Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Priv.-Doz. Dr. S. Klapp
Dipl.-Phys. Jan Schlesner http://www.itp.tu-berlin.de/8769.html

3. Übungsblatt zur Theoretische Physik IIIa: Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 15.05.07 in der Vorlesung

Aufgabe 5(4 Punkte): *Einfache Kommutatoren*
Berechnet folgende Kommutatoren:

(a) $[\hat{p}_{x_i}, \hat{x}_j]$

(b) $[\hat{p}_{x_i}, \hat{p}_{x_j}]$

(c) $[\hat{x}_i, \hat{x}_j]$

Aufgabe 6(13 Punkte): *Virialsatz*

(a) Man zeige, dass für Hamilton–Operatoren der Form $\hat{H} = \hat{H}(\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{p}}) = \sum_{k,m,n} C_{mn} \hat{p}_k^m \hat{x}_k^n$ mit festen Koeffizienten C_{mn} ($k \in 1, 2, 3$ und $n, m \in 1, 2, \cdots, \infty$) die folgenden Vertauschungsrelationen gelten:

$$[\hat{H}, \hat{p}_k] = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_k}, \text{ und } [\hat{H}, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \hat{H}}{\partial p_k}.$$

(b) Berechnet den Kommutator $[\underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{p}}, \hat{H}]$ für alle Hamilton–Operatoren $\hat{H}$ der Form $\hat{H} = \hat{T}(\underline{\hat{p}}) + \hat{V}(\underline{\hat{x}})$ mit $\hat{T} = \frac{\underline{\hat{p}}^2}{2m}$.

(c) ($\mathit{Bonusaufgabe: 4\ Punkte}$) Unter welchen besonderen Voraussetzungen gilt der Virialsatz für die Erwartungswerte: $2\langle\hat{T}\rangle = \langle\underline{\hat{x}} \cdot \nabla\hat{V}\rangle$? Für welche Form des Potenzials $\hat{V}$ gilt unter Verwendung des Virialsatzes $\langle\hat{T}\rangle = \langle\hat{V}\rangle$?

Aufgabe 7(8 Punkte): *Rechnen mit Operatoren*
Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren im Hilbert–Raum $\mathcal{H}$. Zeigt folgende Behauptungen unter der Bedingung, dass $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ gilt:

(a) $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$

(b) $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{[\hat{A},\hat{B}]}$

Hinweis: Es gilt $e^{\hat{A}}\hat{B} = \left(\hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]\right) e^{\hat{A}}$. Ein möglicher Lösungsweg für Punkt (a) basiert darauf, dass man die Funktionen $f(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} e^{-t^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$ betrachtet und zeigt, dass diese Funktionen der gleichen linearen DGL 1. Ordnung zu gleichen Anfangswerten gehorchen. Analog für Punkt (b) kann man die Funktionen $f(t) = e^{t\hat{A}} e^{\hat{B}}$ und $g(t) = e^{\hat{B}} e^{t\hat{A}} e^{[t\hat{A},\hat{B}]}$ betrachten.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Aufgabe 8(15 Punkte): *Projektoren*
Eine lineare Abbildung $\hat{P}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ in sich selbst heißt (orthogonaler) **Projektor**, wenn sie **idempotent** und **selbstadjungiert** ist, d.h., wenn gilt:

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \quad \text{und} \quad \hat{P}^+ = \hat{P}.$$

1. Zeigt: $\hat{Q} = \hat{\mathbb{1}} - \hat{P}$ ist ein Projektor, wenn $\hat{P}$ ein Projektor ist und es gilt $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0$.

2. Berechnet die Eigenwerte eines Projektors.

3. Seien $\hat{P}, \hat{Q}$ Projektoren, für die gilt: $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = \hat{Q}$. Zeigt, dass $\hat{P} - \hat{Q}$ ein Projektor ist.

4. Sei $\phi \in \mathcal{H}$ ein normierter Vektor und $\hat{P} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}; \eta \mapsto |\phi\rangle\langle\phi|\eta\rangle$. Zeigt, dass diese Abbildung ein Projektor ist.

5. Seien $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ orthonormale Vektoren. Zeigt, dass die Abbildung

   $$\hat{Q} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}; \eta \mapsto |\phi\rangle\langle\psi + \phi|\eta\rangle$$

   idempotent aber *kein* Projektor ist.

Hinweise: Es wird voraussichtlich insgesamt 11 reguläre Übungsblätter geben.
Übungsblätter werden Dienstag in der Vorlesung ausgegeben und eine Woche später am Ende der Vorlesung eingesammelt.

Literaturtipps zur Lehrveranstaltung (nur eine Auswahl):

- A. Messiah, Quantenmechanik I und II, de Gruyter
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsges.
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik Band 5 Quantenmechanik, Teil I+II, Springer
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik I+II, de Gruyter

Kontakt: http://www.itp.tu-berlin.de/8769.html