

7. Übungsblatt zur Theoretische Physik IIIa: Quantenmechanik

Abgabe: Mittwoch 13.06.07 in der Vorlesung

Aufgabe 17(6 Punkte): Kommutatoren von Drehimpulsoperatoren

1. Zeigt: $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$.
2. Zeigt: Falls ein Operator mit zwei Komponenten des Drehimpulsoperators kommutiert, so kommutiert er auch mit der dritten Komponente.
3. Berechnet die folgenden Kommutatoren: $[\hat{L}_+, \hat{L}_-]$, $[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm]$ und $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm]$.

Aufgabe 18(12 Punkte): Drehimpulsoperatoren

Ein System befinde sich im gemeinsamen Eigenzustand $|lm\rangle$ der Drehimpulsoperatoren \hat{L}_z und \hat{L}^2 .

1. Zeigt: $\langle lm|\hat{L}_i|lm\rangle = 0$ für $i = x, y$.
2. Berechnet $\langle lm|(\hat{L}_i - \langle \hat{L}_i \rangle)^2|lm\rangle$ für $i = x, y, z$.
3. Zeigt, dass die kleinste Streuung für \hat{L}_x und \hat{L}_y erreicht wird, wenn $|m| = l$ ist.
4. Zeigt: $\hat{L}_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|lm \pm 1\rangle$

Aufgabe 19(22 Punkte): Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten

Zur Behandlung von Zentralpotenzialen ist es sinnvoll, Kugelkoordinaten zu verwenden. Benutzt die in der Vorlesung verwendete Definition der Winkel ϑ und φ , so dass sich die folgenden Transformationen von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten ergeben:

$$\begin{aligned}x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\z &= r \cos(\vartheta).\end{aligned}$$

1. Berechnet den Nabla-Operator ∇ und den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten. Geht hierfür nur von den obigen Definitionen aus. (Einheitsvektoren sind also noch nicht bekannt.)
2. Ermittelt den Bahndrehimpulsoperator \underline{L} und \underline{L}^2 in Kugelkoordinaten.
3. Bestimmt die Komponenten L_x , L_y und L_z des Bahndrehimpulsoperators in Abhängigkeit von r , ϑ und φ .
4. Zeigt mit Hilfe der obigen Teilaufgaben

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta_{\vartheta\varphi}$$

mit

$$\Delta_{\vartheta\varphi} = -\frac{\hat{L}^2}{r^2\hbar^2}.$$

Bitte Rückseite beachten!→

Hinweise: Es wird voraussichtlich insgesamt 10 reguläre Übungsblätter geben. Übungsblätter werden Dienstag in der Vorlesung ausgegeben und eine Woche später am Mittwoch am Ende der Vorlesung eingesammelt. (Ausnahme: letztes Übungsblatt vor der Klausur)

Literaturtipps zur Lehrveranstaltung (nur eine Auswahl):

- A. Messiah, Quantenmechanik I und II, de Gruyter
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsges.
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik Band 5 Quantenmechanik, Teil I+II, Springer
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik I+II, de Gruyter

Kontakt: <http://www.itp.tu-berlin.de/8769.html>