

## 5. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

**Abgabe: Dienstag 03.06.08** vor der Übung

### Aufgabe 1 (10 Punkte): *Rindler-Koordinaten*

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$x^0 = (x'^1 + \frac{1}{a}) \sinh(ax'^0) \quad x^1 = (x'^1 + \frac{1}{a}) \cosh(ax'^0) \quad x^2 = x'^2 \quad x^3 = x'^3 \quad (1)$$

die den Übergang in ein Nichtinertialsystem im Minkowski Raum beschreibt.

a) Bestimmen Sie den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \eta_{\rho\kappa}$$

für die durch die Transformation (1) implizierten Koordinaten.

b) Zeichnen Sie das Raum-Zeit-Diagramm für einen im Koordinatensystem  $K'$  ruhenden Beobachter bezüglich  $K$ . Zeichnen Sie den Lichtkegel und die Weltlinie eines anderen Inertialsystems. Welcher Effekt tritt neu hinzu, wenn man die Kurve von  $K'$  als die Weltlinie eines Teilchens betrachtet?

c) Geben Sie den kontravarianten metrischen Tensor, welcher über  $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$  definiert ist, an.

d) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

für diese Koordinaten. Nutzen Sie deren Symmetrie im unteren Indexpaar aus.

e) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung (Geodätengleichung)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0$$

in diesen Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{dt^2} + 2 \frac{a}{(1 + ax^1)} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^0}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} + a(1 + ax^1) \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} \delta_1^i &= 0 \end{aligned}$$

annimmt.

f) Bestimmen Sie für die Lagrange-Funktion

$$L = (ds/d\tau)^2 = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

mittels der in a) bestimmten Metrik, die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0,$$

wobei  $\dot{x}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau}$  ist.