

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Dienstag 27.05.08 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): Energie-Impuls-Bilanz eines idealen Fluids in der Speziellen Relativitätstheorie - Newtonscher Limes

Der Energie-Impuls-Tensor eines idealen Fluids ist definiert durch

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\alpha u^\beta - p\eta^{\alpha\beta},$$

wobei ρ die Massendichte, p der Druck und u^α das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist (in der Vorlesung eingeführt).

- (i) Leiten Sie die Energie-Impuls-Bilanz $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ (kräftefreier Fall) für diesen Tensor ab.
- (ii) Beweisen Sie, dass die Nullkomponente dieser Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \partial_i(\rho v^i) = 0 \tag{1}$$

übergeht. Vernachlässigen Sie dazu alle Terme $O(c^{-1})$ sowie \dot{u}^α , benutzen Sie die Zerlegungen für $(u^\alpha) = \gamma(c, v^i)$ und beachten Sie, dass $\gamma \cong 1$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Energie-Impuls und Bahndrehimpuls

Der elektromagnetische Feldstärke-Tensor, der in der geometrischen Optik benutzt wird lautet

$$F_{\alpha\beta} = \lambda(A_\beta k_\alpha - A_\alpha k_\beta),$$

wobei k_α ein Nullvektor (lichtartiger Vektor) ist, d.h. $k_\alpha k^\alpha = 0$ gilt, und der Eigenschaft $k_\alpha A^\alpha = 0$ genügt (λ bezeichnet eine Konstante). Durch den Ansatz bedingt ist k_α ein Gradientenfeld, d.h. $k_\alpha = S_{,\alpha}$, auf den Flächen konstanter Phase S .

- a) Bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor für den obigen Feldstärke-Tensor

$$T^\beta{}_\gamma = \frac{c}{4\pi} \left(F^{\alpha\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{1}{4} \delta^\beta{}_\gamma F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \right) \tag{2}$$

im Fall, dass der Betrag des Vierer-Potentials A_α auf 1 normiert ist.

- b) Bilden Sie den Bahndrehimpuls-Tensor

$$M^{\alpha\beta\gamma} := x^{[\alpha} T^{\beta]\gamma} \tag{3}$$

dieses Feldes und bestimmen Sie die Energie-Impuls-Bilanz (ohne äußere Quellen) und die Bahndrehimpuls-Bilanz $M^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} = 0$ wenn $k^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ gilt.