

10. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08**Abgabe: Fr. 27.06.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 34 (6 Punkte): Bewegung im Schwerfeld

Gegeben ist die Flugbahn eines Teilchens auf der Erde

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ v_z t - g t^2 \end{pmatrix},$$

wobei $v_x, v_z \geq 0$ die Geschwindigkeitskomponenten in x - bzw. z -Richtung sind, $g > 0$ die Fallbeschleunigung ist, und t die Zeit bezeichnet.

- (a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ und die Beschleunigung $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$.
- (b) Berechnen Sie die Weglänge $s(t)$ für den Fall $v_z = 0$. Was passiert für $v_x \rightarrow 0$?
Hinweis: Das auftretende Integral kann durch geeignete Substitution mit $\sinh x$ gelöst werden. (Alternativ hilft eine Integraltafel.)
- (c) Parametrisieren Sie \mathbf{r} durch den in x -Richtung zurückgelegten Weg.
- (d) Wir legen nun unser Koordinatensystem in den Brennpunkt F der Parabel. So kann die Parabel in der Form

$$\tilde{y} = 0 \quad \tilde{z} = a\tilde{x}^2 - \frac{1}{4a}$$

dargestellt werden. Geben Sie die notwendige Koordinatentransformation (Verschiebung des Koordinatenursprungs) an und bestimmen Sie a . Stellen Sie die Parabel in Kugelkoordinaten dar, d.h., berechnen Sie $R(\vartheta)$ für die Bahn.

Aufgabe 35 (5 Punkte): TemperaturverteilungEin Festkörper, der den rechten Halbraum ausfüllt ($0 < x$), habe die Temperatur

$$T(\mathbf{r}) = T_0 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(r^2/2ax) \right) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Welche Form und Lage haben die Flächen gleicher Temperatur? Man skizziere deren Schnittlinien mit der xy -Ebene sowie den T -Verlauf entlang der positiven x -Achse und bilde $\text{grad}T$. Wie verändert sich Richtung und Betrag des Temperaturgradienten entlang der y -Achse und entlang der Geraden $y = x$ und $z = 0$?

Bitte Rückseite beachten! →

Aufgabe 36 (4 Punkte): Koordinatensysteme und GradientGegeben sind die folgenden Skalarfelder $\phi_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

(1)
$$\phi_1(x, y, z) = -\frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(2)
$$\phi_2(x, y, z) = x$$

(3)
$$\phi_3(x, y, z) = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

- (a) Stellen Sie die Skalarfelder in Zylinder- und in Sphärischen Polarkoordinaten dar und kommentieren Sie das Ergebnis.

Zusatz: Finden Sie Koordinaten, die für ϕ_3 besser geeignet sind.

- (b) Berechnen Sie die Gradienten der Skalarfelder.

Aufgabe 37 (5 Punkte): Zylinderkoordinaten

- (a) Bestimmen Sie die normierten kovariante Basisvektoren für Zylinderkoordinaten. Stellen Sie hiermit die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten
- (ρ, ϕ, z)
- dar und geben Sie den metrischen Tensor an.

- (b) Berechnen Sie den Gradienten in Zylinderkoordinaten, ausgedrückt in der normierten kovarianten Basis.

- (c) Nutzen Sie Ihr Ergebnis um ein Skalarfeld
- $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
- zu finden, welches die folgende Bedingung erfüllt

$$\text{grad}V = \frac{\alpha}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> • Donnerstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Sprechzeiten:	<ul style="list-style-type: none"> • Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744 • Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702 • Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628 • Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217 • Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217 • Christian Otto: Mi, 14–15 Uhr im EW 217 • Maria Richter: Di, 9–10 Uhr im EW 217
Tutorien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang • Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang • Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter • Di 08–10 Uhr EW 015 Christian Otto • Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner • Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto • Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel • Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter

Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105