Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

25. Juni 2008

Prof. Dr. Tobias Brandes, Dipl.-Phys. Reinhard Vogel, Dipl.-Phys. Stefan Fruhner

11. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08

Abgabe: Fr. 04.07.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 38 (6 Punkte): *Gradient in Kugelkoordinaten*

In der Vorlesung wurde der Gradient in beliebigen Koordinaten eingeführt.

(a) Leiten Sie den Gradienten in Kugelkoordinaten her.

(b) Bestimmen Sie damit die Gradienten ∇r und $\nabla f(r)$ in Kugelkoordinaten mit $r = |\mathbf{r}|$.

Das Potenzial eines Dipols ist durch $U(r,\vartheta) = \frac{p\cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ gegeben. Hierbei sind p und ϵ_0 Konstanten.

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E} = -\nabla U$ und dessen Betrag $|\mathbf{E}|$.

(d) Mit welcher Potenz nimmt $|\mathbf{E}|$ mit dem Abstand vom Dipol ab und für welche Winkel ϑ ist $|\mathbf{E}|$ minimal bzw. maximal?

Aufgabe 39 (1 Punkte): *Wdh. Kreuzprodukt und Epsilon-Tensor*

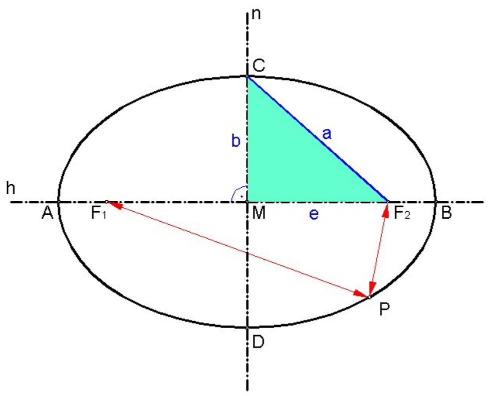
Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Komponenten des Kreuzproduktes $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ die Beziehung $a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$. Zeigen Sie mittels dieser Definition die *Jacobi*-Identität:

$$0 = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad .$$

Aufgabe 40 (4 Punkte): *Ellipse*

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte $P = (x,y)$, für die die Summe der Entfernungen zu zwei gegebenen festen Punkten $F_1 = (e,0)$ und $F_2 = (-e,0)$ (F_1, F_2: Brennpunkte) konstant $2a > 0$ ist, d.h.

$$|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a.$$



(a) Bestimmen Sie die Ellipsengleichung in kartesischen Koordinaten (in Abhängigkeit von a und b).

(b) Überlegen Sie sich eine geeignete Parameterform $(x,y) = (f(t), g(t))$ der Ellipse. Berechnen Sie den Tangentialvektor $\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}t}$.

(c) Bestimmen Sie die Ellipsengleichung in Polarkoordinaten. Verwenden Sie dazu die Größen $k = b^2/a$ und $\epsilon = e/a < 1$ (Exzentrizität) und legen Sie den Koordinatenursprung in einen Brennpunkt.
Hinweis: Berechnen Sie $|\overline{F_1P}|^2 - |\overline{F_2P}|^2$ einmal mit Hilfe der binomischen Formel und einmal mit dem Satz von Pythagoras.

(d) Diskutieren Sie die Ergebnisse aus (a-c) für den Fall $\epsilon = 0$.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 41 (3 Punkte): *Laplace-Transformation*
Um eine Funktion f besser analysieren zu können, führen wir ihre Laplace-Transformierte durch

$$\hat{f}(z) \equiv \int_0^\infty \exp(-zt) f(t) dt \qquad \text{mit } z \in \mathbb{C}$$

ein. Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Funktion $f(t) = \exp(-\gamma t)\cos(\omega t)$, $\gamma > 0$, welche eine gedämpfte Oszillation beschreibt. Finden Sie die Singularitäten von $\hat{f}$ und diskutieren Sie deren physikalische Bedeutung.

Aufgabe 42 (6 Punkte): *Der Bungee-Springer*
Von einer Brücke der Höhe h springe ein Bungee-Springer herab. Nach einer Fallstrecke l_0 bis zu der ein freier Fall angenommen werden kann, setze die Kraft F_S eines Gummibandes ein, die ab dann mit $F_S = \alpha \Delta l = \alpha(l - l_0)$ der Schwerkraft $F_g = mg$ entgegenwirkt, wobei α der Dehnungskoeffizient des Seils sei. Seilgewicht und Reibungseffekte können vernachlässigt und der Springer kann als punktförmig betrachtet werden. Der Springer startet mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

(a) Welche Geschwindigkeit hat ein Springer, wenn erstmals die Kraft des Seils einsetzt?

(b) Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Einfluss des Seils. Für die Bewegung in z-Richtung gilt die Differentialgleichung $m\ddot{z} = -\alpha\,[z - (h - l)] - mg$. Für welche Länge l_g würde der Springer im Gleichgewicht hängen? Zeigen Sie, dass sich für die Auslenkung aus dem Gleichgewicht $u = z - z_g$ eine eine homogene Differentialgleichung ergibt.

(c) Geben Sie die zusammengesetzte Lösung der Bewegungsgleichung (unter Beachtung der Anschlussbedingungen) für die aus dem Sprung hervorgehenden Anfangsbedingungen an.

(d) Bestimmen Sie den tiefsten Punkt l_e des Sprunges und die dort auftretende Beschleunigung (dies kann man tun, ohne den zugehörigen Zeitpunkt t_e explizit zu bestimmen).

Hinweis: Es gilt die Identität $a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin[\omega t + \phi]$ mit $\tan \phi = \frac{b}{a}$.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Sprechzeiten:
- Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744
- Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702
- Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628
- Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217
- Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217
- Christian Otto: Mi, 14-15 Uhr im EW 217
- Maria Richter: Di, 9-10 Uhr im EW 217

Tutorien:
- Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch
- Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch
- Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang
- Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang
- Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter
- Di 08–10 Uhr EW 015 Christian Otto
- Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner
- Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto
- Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel
- Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter

Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105