Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

30. Juni 2008

Prof. Dr. Tobias Brandes, Dipl.-Phys. Reinhard Vogel, Dipl.-Phys. Stefan Fruhner

12. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08

Aufgabe (43): *Komplexe Zahlen*

(1) Berechnen und skizzieren Sie folgende komplexe Zahlen

- (a) $(2i)^{2i}$
- (b) $\sqrt[3]{i}$
- (c) $z^3 = i$

(2) Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Zahlenebene:

- (a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} |\, |z-1| = 4|\}$
- (b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} |\, |z-1| = |z+1|\}$
- (c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| + \Re[z] \leq 2\}$
- (d) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} |\, \Re[z] \leq 1\}$
- (e) $M_5 = \{z \in \mathbb{C} |\, \frac{1}{3} < \frac{|z-1|}{|z+1|} < \frac{1}{2}\}$

Aufgabe (44): *Taylorreihen*
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylorreihe bis zur 2. Ordnung. Sie können einen Entwicklungspunkt x_0 wählen. Skizzieren Sie die Funktionen.

- (a) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$
- (b) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
- (c) $f(x) = \sin x^2/x^2$
- (d) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$
- (e) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Aufgabe (45): *Differentialgleichungen*
Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

$$y' = \frac{x^2}{\sin y} \quad , y(0) = \frac{\pi}{3} \tag{1}$$

$$2y'' + 5y = 0 \quad , y(0) = 1, y'(0) = 2, \tag{2}$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad , y(0) = 2, y'(0) = 3, \tag{3}$$

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = t \quad , y(0) = 1, \dot{y}(0) = \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$y' + \alpha y = x \quad , y(0) = 1. \tag{5}$$

$$y'' + \gamma y' + \omega^2 y = 0 \quad , y(t_0) = \alpha, \dot{y}(t_0) = \beta. \tag{6}$$

Aufgabe (46): *Eigenwerte und Eigenvektoren*

(1) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\Theta & 0 \\ 0 & \sin\Theta \end{pmatrix}$$

(2) Verwenden Sie die Pauli-Matrizen

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie $\exp(\alpha\sigma_x)$, $\exp(\alpha\sigma_y)$ und $\exp(\alpha\sigma_z)$.

(3) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Aufgabe (47): *Lineare Schwingungen*

(1) **Schwingungsfrequenzen eines Moleküls mit zwei Massen**
Ein einfaches Modell für ein zweiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung zweier Massepunkte, die durch eine masselose Feder miteinander verbunden sind. Berechnen Sie die Eigenschwingungen des Systems für den Fall zweier gleicher Massen m. *Hinweis:* Zeigen Sie, daß Sie mit dem Ansatz $x_j = A_j \sin(\omega t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{array}{ccc} m & k & m \\ \bigcirc & \text{———} & \bigcirc \\ x_1 & & x_2 \end{array}$$

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1),$$
$$m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2)$$

ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie dessen Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

(2) **Gekoppelte Massen**
Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 , die sich auf einer Geraden bewegen und durch eine Feder mit der Federkonstanten k_2 aneinander gekoppelt sind. Die linke Masse sei weiterhin durch eine Feder mit gleicher Federkonstante k_1 an eine Wand links gekoppelt, die rechte Masse sei frei. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden dieses Systems.

Aufgabe (48): *Fourierreihen*

(1) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen sowohl in eine reelle als auch in eine komplexe Fourierreihe.

(a) $f(x) = x$ für $x \in [0, 2\pi]$
(b) $f(x) = |x|$ für $x \in [-\pi, \pi]$
(c) $f(x) = |\sin x|$ für $-\pi < x < \pi$
(d) $f(x) = \cos x \sin x$ für $-\pi < x < \pi$
(e) $f(x) = -x^2 + 1$ [-1,1] gerade fortgesetzt auf $\mathbb{R}$
(f) $f(x) = x(\pi - x)$ für $0 \leq x \leq \pi$ mit ungerader Fortsetzung in $[-\pi, 0]$
(g) $f(x) = x^2$ für $x \in [0, \pi]$ gerade fortgesetzt auf $[-\pi, 0]$
(h) $f(x) = x^2$ für $x \in [0, \pi]$ ungerade fortgesetzt auf $[-\pi, 0]$

(2) **Diffusionsgleichung**
Lösen Sie die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)$$

allgemein auf dem Intervall $[0, L]$, wobei $n(x,t)$ die Konzentration eines Stoffes am Ort x zur Zeit t beschreibt. An den Enden soll der Stoff nicht entweichen können. Es gelten also die Randbedingungen $j(0,t) = j(L,t) = 0$ für die Stromdichte $j(x,t) = -D\frac{\partial}{\partial x} n(x,t)$. Zu Beginn ist die Konzentration gegeben durch $n(x,0) = n_0(x)$.

Bestimmen Sie anschließend die Lösung für die Anfangskonzentration

$$n_0(x) = \begin{cases} \frac{2n_{max}}{L} x & 0 \leq x < \frac{L}{2}, \\ \frac{2n_{max}}{L}(L - x) & \frac{L}{2} \leq x < L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und diskutieren Sie den Fall $\varepsilon \to 0$. Beschreiben Sie das zeitliche Verhalten.

(3) **Schrödingergleichung**
Die Schrödingergleichung eines freien Teilchens der Masse m, das sich in einer Dimension bewegt, lautet

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t), \psi(x,0) = \psi_0(x)$$

Hierbei ist $\psi(x,t)$ die Wellenfunktion des Teilchens, und

$$|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x \equiv p(x,t)\,\mathrm{d}x$$

ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[x, x+dx]$ zu finden. Wie bei der Diffusionsgleichung können wir diese Gleichung wieder durch Separationsansatz und mittels Fourier-Reihen auf einem endlichen Intervall lösen.
Lösen Sie die Schrödingergleichung in einer Dimension auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ für

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \sin(\frac{x}{L}\pi) & , 0 \le x \le L \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

(4) **Parsevalsche Gleichung**: Gegeben ist eine Funktion f auf $[-L, L]$ mit ihrer komplexen Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\frac{n\pi}{L}x)$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Parsevalschen Gleichung (Vollständigkeitsrelation)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x|f(x)|^2.$$

Begründen Sie, dass dies eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras ist.

(5) Zeigen Sie die **Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen**

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{m\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nm}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nm}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\exp(i\frac{n\pi}{L}x)\exp(-i\frac{m\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = \delta_{nm}. \tag{10}$$

Aufgabe (49): *Fourier-Transformation*

(1) Zeigen Sie folgende **Eigenschaften der Fouriertransformation** $\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t)\exp(i\omega t)$:

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega\mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{(Ableitung)}$$
$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = \exp(i\omega t_0)\mathcal{F}[f](\omega) \qquad \text{(Verschiebungssatz)}$$

(2) Verwenden Sie das **Gauß-Integral** $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, um zu zeigen, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-ax^2 + bx\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \quad .$$

Hinweis: Verwenden Sie eine quadratische Ergänzung.

(3) Berechnen und diskutieren Sie die **Fouriertransformierte** der Funktionen

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} \frac{2c}{T} t & 0 \le t \le \frac{T}{2}, \\ \frac{2c}{T}(T - t) & \frac{T}{2} < t < T, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(t) = cos(\Omega t)$$

(3) Lösen Sie die **Diffusionsgleichung**

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)$$

auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ mit Hilfe der Fouriertransformation.

Als Anfangskonzentration $n(x,0) = n_0(x)$ wird die Verteilung $n_0(x) = \begin{cases} n_{max} & |x| < A, \\ 0 & |x| > A, \end{cases}$ angenommen. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe (50): *Differentialgeometrie*

(1) **Krümmung** Zeigen Sie dass für die Krümmung gilt:

$$K = \left| \frac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s} \right| = \frac{\mathbf{v}^2 \mathbf{a}^2 - (\mathbf{va})^2}{\mathbf{v}^6} \, .$$

(2) **Begleitendes Dreibein** Zeigen Sie für den Binormalenvektor $\mathbf{b}$ und den Normalenvektor $\mathbf{n}$ den Zusammenhang mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und Beschleunigung $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|} \qquad , \qquad \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v}}{|(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{v}|}$$

(3) **Bogenlänge einer Zykloide** In der Ebene $\mathbb{R}^2$ sei eine Kurve durch die Abbildung

$$\begin{aligned} c : (-\pi, \pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \frac{1}{2}(t + \sin t, 1 + \cos t) \end{aligned}$$

gegeben. Eine solche Kurve heißt *Zykloide*.

1. Skizzieren Sie die Kurve.
2. Berechnen Sie den Tangentialvektor der Kurve, also die Geschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt im Definintionsintervall.
3. Berechnen Sie die Bogenlänge $L[t_0]$ der Kurve im Intervall $(-\pi, t_0)$ für $t_0 < \pi$. Wie lang ist die gesamte Kurve?
   Hinweis: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$
4. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit den Betrag 1 hat.