

2. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08**Abgabe: Fr. 02.05.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors und auf dem Aufgabenzettel angeben!

Aufgabe 4 (4 Punkte): Komplexe Zahlen

- (a) Berechnen Sie die dritte Wurzel aus -8 und zeichnen Sie das Ergebnis in die komplexen Zahlenebene.
- (b) Die Gleichung $|z - a| = b$ mit $z, a \in \mathbb{C}$ und $b > 0$ beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt a und Radius b in der komplexen Zahlenebene. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = b^2$$

den selben Kreis beschreibt.

- (c) Bestimmen Sie rechnerisch und erläutern Sie in Worten und mit einer Skizze, welches geometrische Objekt beschrieben wird.

$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = |z + 3| \wedge \operatorname{Im} z = 4\}$$

$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| < 3 \wedge \operatorname{Re} z = -1/2\}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte): Trigonometrische Funktionen

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe der Multiplikationsregeln komplexer Zahlen, dass gilt

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

Nutzen Sie dieses Ergebnis um folgende trigonometrische Identitäten zu zeigen

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \quad (1)$$

$$\cos(nx) = \cos^n(x) - \binom{n}{2} \cos^{n-2}(x) \sin^2(x) + \binom{n}{4} \cos^{n-4}(x) \sin^4(x) - + \dots \quad (2)$$

- (b) Zeigen Sie

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}).$$

- (c) Analog zu (b) definiert man den Sinus Hyperbolicus und den Kosinus Hyperbolicus als

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}).$$

Zeichnen Sie die beiden Funktionen. Bestimmen Sie ihre Potenzreihenentwicklung. Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen Lösungen der Differentialgleichung $y''(x) = y(x)$ sind.

Bitte Rückseite beachten! →

Aufgabe 6 (5 Punkte): Barometrische Höhenformel

Der Luftdruck nimmt mit der Höhe ab. Näherungsweise folgt er der Differentialgleichung

$$\frac{dp(h)}{dh} = -\alpha \frac{p(h)}{T(h)}.$$

Hierbei ist T die Temperatur und α proportional zur Gaskonstanten.

- Berechnen Sie den Druck $p(h)$ unter der Annahme, dass
 - (a) die Temperatur konstant ist: $T(h) = \text{const.}$
 - (b) die Temperatur $T(h)$ gegeben ist durch $T(h) = T_0 - \beta(h - h_0)$.
- (c) Zeigen Sie, dass beide Lösungen für kleine Höhendifferenzen $\Delta h = (h - h_0)$ äquivalent sind.

Aufgabe 7 (3 Punkte): Radioaktiver Zerfall

Zur Zeit $t \geq 0$ seien $n(t)$ Atome einer radioaktiven Substanz vorhanden. Die Zahl dn , die in einer kleinen Zeitspanne dt zerfällt, ist proportional zur gerade vorhandenen Zahl $n(t)$ und der Zerfallszeit dt . Daraus ergibt sich sofort die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n \text{ mit der positiven Konstante } \lambda.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, wenn anfänglich n_0 Atome vorhanden sind.
- (b) Bestimmen Sie die Zeit τ , innerhalb derer sich $n(t)$ auf die Hälfte vermindert (Halbwertszeit).
- (c) Radioaktive Abfälle werden in Behältern aus rostfreiem Stahl oder Beton unter der Erde gelagert. Nach Meinung von Experten sollen die Behälter intakt bleiben, bis 99,99% des Abfalls zerstrahlt sind. Wie lange muß die Mindestlebenszeit der Behälter sein, wenn in ihnen gelagert werden soll:
 - (1) Strontium-90 (Halbwertszeit $\tau = 28$ Jahre)
 - (2) Radium-226 ($\tau = 1620$ Jahre)
 - (3) Plutonium-239 ($\tau = 24360$ Jahre)

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> • Donnerstag 8:20 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Sprechzeiten:	<ul style="list-style-type: none"> • Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744 • Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702 • Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628 • Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217 • Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217 • Christian Otto :Mittwoch, 14-15 Uhr im EW 217 • Maria Richter: Dienstag, 9-10 Uhr im EW 217
Tutorien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang • Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang • Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter • Di 08–10 Uhr EW 246 Christian Otto • Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner • Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto • Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel • Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter
Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105	