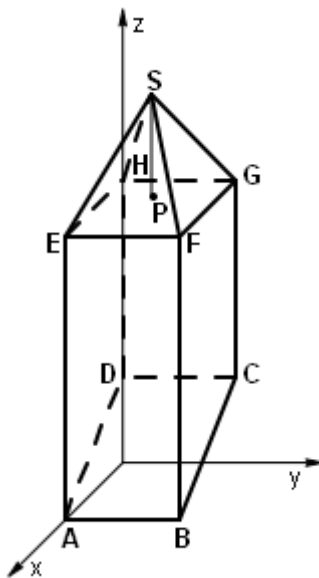


3. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08
--

Abgabe: Fr. 09.05.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 8 (5 Punkte): Wdh. Abitur: Analytische Geometrie



An einem Steilhang wird ein Beobachtungsturm errichtet. Dieser Turm kann als ein von einer Ebene geschnittener Quader mit aufgesetzter gerader Pyramide aufgefasst werden. Die Höhe der aufgesetzten Pyramide beträgt 4 m. Es sind die Koordinaten der folgenden Punkte bekannt (vgl. Abb./ Koordinateneinheit 1m):

$$A = (4, 0, 0), \quad B = (4, 4, 0), \quad D = (0, 0, 3),$$

$$F = (4, 4, 10), \quad H = (0, 0, 10) \quad .$$

- (a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C, E, G und S . Der Steilhang liegt in der Ebene, die durch die Punkte A, B, C und D geht. Stellen Sie eine Gleichung dieser Ebene auf.
- (b) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen dem Steilhang und der horizontalen xy -Ebene
- (c) Ein Sonnenstrahl in Richtung $\vec{a} = (-2, 1, -1)$ erzeugt auf dem Hang den Schattenpunkt S' der Turmspitze S . Ermitteln Sie die Koordinaten von S' . Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Sonnenstrahl auf den Hang trifft.
- (d) In der Turmspitze soll ein Pendel so angebracht werden, dass der Pendelkörper in seiner Ruhelage P von allen Eckpunkten der Pyramide den gleichen Abstand hat. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P .

Aufgabe 9 (5 Punkte): Wiederholung

- (a) Berechnen Sie i^i .
- (b) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$ gegeben ist durch

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

- (c) Der komplexe Widerstand eines Kondensators C ist $Z_C = 1/i\omega C$. Der vollständige komplexe Widerstand Z eines Stromkreises mit Widerstand R und Kondensator C in Reihe ist $Z = R + Z_C$. Skizzieren Sie den Schaltkreis und berechnen Sie die komplexe Stromstärke I_0 mit $V_0 = ZI_0$ mit der komplexen Spannung V_0 . Berechnen Sie den komplexen Spannungsabfall V_C und dessen Betrag $|V_C|$ am Kondensator. Bestimmen Sie die charakteristische Zeitskala des Schaltkreises.

Bitte Rückseite beachten! →

Aufgabe 10 (4 Punkte): Vermehrung von Fruchtfliegen

Um 1920 stellte R. Pearl fest, dass die Änderungsrate $\frac{dp}{dt}$ einer Population der Fruchtfliegen *Drosophila* mit der Populationsgröße $p(t)$ über die Differentialgleichung

$$\frac{dp}{dt} = \alpha p - \beta p^2 \quad (\text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

zusammenhängt. Zeigen Sie, dass die Population gegen eine Gleichgewichtsgröße p_∞ strebt.

Tip: Verwenden Sie zunächst die Transformation $p = \frac{1}{z}$, um die Gleichung in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung zu überführen.

Bonusaufgabe 11 (3 Zusatzpunkte): Elektrischer Dipol

Im Nullpunkt eines x - y -Koordinatensystems befinde sich ein elektrischer Dipol, dessen Achse in der x -Richtung liege. Führt man Polarkoordinaten (r, ϕ) ein, so genügen seine Feldlinien der Differentialgleichung $dr/d\phi = 2r \cot(\phi)$. Bestimme die Gleichung $r = r(\phi)$ dieser Linien und skizziere einige von ihnen.

Aufgabe 12 (5 Punkte): Adrenalinhalt des Blutes

Adrenalin ist ein Hormon, das von den Nebennieren in das Blut ausgeschüttet (sekretiert) und dort durch Enzyme abgebaut wird. Die Adrenalinsekretion erfolgt in einem 24stündigen Rhythmus, wobei sie gegen 8 Uhr am stärksten, gegen 20 Uhr am schwächsten ist. Man wird die zeitliche Sekretion $S(t)$ deshalb in erster Näherung durch

$$S(t) = a + b \cos\left(\frac{\pi}{12}(t - 8)\right) \quad (a > b > 0, 0 \leq t)$$

beschreiben. Die Abbaurate ist proportional zu dem gerade vorhandenen Adrenalinhalt $A(t)$. Stellen Sie eine Differentialgleichung für A auf, bestimmen Sie ihre allgemeine Lösung und zeigen Sie, dass A im Wesentlichen eine Funktion mit 24stündiger Periode ist.

In Stresssituationen wird die Adrenalinausschüttung über das normale Maß hinaus gesteigert. Das hat den wohltätigen Effekt, dass man z.B. selbst nach unruhiger Nacht in einer Prüfung immer noch fit ist.

Aufgabe 13 (1 Punkte): Graphik mit Mathematica

Auf den Rechnern des Physik-Computerpools ist *Mathematica* installiert. Dieses Programm eignet sich zur graphischen Darstellung von Funktionen. Hierzu wird der Befehl `Plot[]` verwendet. Um beispielsweise die Funktion $\sin(x)$ im Intervall von 0 bis 10 zu darstellen, gibt man `Plot[Sin[x],{x,0,10}]` ein. Zum Ausführen des Befehls muß die *Shift*-Taste und die *Enter*-Taste betätigt werden.

Stellen Sie mit Hilfe eines Computers die (aus der Vorlesung bekannte) Lösungen der Differentialgleichung $y' = \sin(x) \exp(y)$ in einem geeigneten Intervall graphisch dar.