

4. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08**Abgabe: Fr. 16.05.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 13 (2 Punkte): Matrizen

Bilden Sie das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und prüfen Sie das Ergebnis durch Ausmultiplizieren direkt nach.

Aufgabe 14 (10 Punkte): Pauli-Matrizen

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$V = M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \mid u, v, w, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{C} ist.(b) Zeigen Sie, dass die *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

eine Basis in V bilden.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Bedingung der linearen Unabhängigkeit jeweils mit einer der $\{\sigma_i\}_{i=0..3}$ und berechnen Sie die Spur¹ der resultierenden Gleichung.

(c) Bestimmen Sie aus den Basisvektoren $\{\sigma_i\}_{i=0..3}$ die Produkte $\sigma_i \cdot \sigma_i$. Hierbei bezeichnet " \cdot " die Matrizenmultiplikation.(d) Der Kommutator von zwei Matrizen A, B ist definiert als

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A.$$

Berechnen Sie die Kommutatoren $[\sigma_i, \sigma_j]$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ (e) Betrachten Sie die Matrix $\sum_i a_i \sigma_i$ für $a_i \in \mathbb{R}$ sowie $i \in \{1, 2, 3\}$ und bestimmen Sie deren Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren. Zeigen Sie ferner, dass mit $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$$\sum_{i,j} a_i \sigma_i a_j \sigma_j = |a|^2 \sigma_0$$

gilt.

(f) *Bonus:* Zeigen Sie, dass für alle $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ gilt $A = \frac{1}{2} \text{tr}(A \cdot \sigma_0) \sigma_0 + \sum_i \frac{1}{2} \text{tr}(A \cdot \sigma_i) \sigma_i$. *Hinweis:* Setzen Sie $A = \sum_i a_i \sigma_i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$) an und bestimmen Sie die Koeffizienten, indem Sie analog zu Aufgabenteil (b) vorgehen.**Bitte Rückseite beachten! →**

¹Die Spur einer Matrix A mit Einträgen a_{ij} ist definiert als $\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_i a_{ii} = a_{ii}$.

Aufgabe 15 (8 Punkte): Gedämpfter Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den gedämpften harmonischen Oszillator ohne äußere Kraft,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0.$$

- (a) Berechnen Sie analog zur Vorlesung die Eigenfrequenzen und die allgemeine Lösung des homogenen Systems für $\gamma > 0$. Hierbei soll angenommen werden, dass die zwei Eigenfrequenzen verschieden voneinander sind.
- (b) Bestimmen Sie $x(t)$ explizit (ausgedrückt durch reelle Funktionen) für die Anfangsbedingung $x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = v_0$. Skizzieren Sie die Lösung.
- (c) Was passiert für $\gamma < 0$?

<i>Vorlesung:</i>	<ul style="list-style-type: none">• Donnerstag 8:20 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202
<i>Scheinkriterien:</i>	<ul style="list-style-type: none">• Mindestens 50% der Übungspunkte.• Bestandene Klausur.• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
<i>Sprechzeiten:</i>	<ul style="list-style-type: none">• Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744• Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702• Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628• Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217• Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217• Christian Otto: Mittwoch, 14-15 Uhr im EW 217• Maria Richter: Dienstag, 9-10 Uhr im EW 217
<i>Tutorien:</i>	<ul style="list-style-type: none">• Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch• Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch• Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang• Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang• Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter• Di 08–10 Uhr EW 246 Christian Otto• Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner• Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto• Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel• Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter

Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105