

5. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08**Abgabe: Fr. 23.05.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 14 (7 Punkte): Levi-Civita-Tensor und Kreuzprodukt

Gegeben sei der total antisymmetrische Tensor 3. Stufe (Levi-Civita-Tensor)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention (über doppelt auftretende Indizes wird von 1 bis 3 summiert).

(a) Zeigen Sie folgende Relationen

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \quad (3)$$

(b) Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Komponenten des Kreuzproduktes $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ die Beziehung $a_i = \varepsilon_{ijk}b_jc_k$. Zeigen Sie mittels dieser Definition (und der Relation (1)) folgende Identitäten:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (4)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (5)$$

(c) Betrachten Sie die Pauli-Matrizen σ_i aus Aufgabe 14 (Übungsblatt 4). Zeigen Sie, dass

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

Aufgabe 15 (5 Punkte): Schwingungsfrequenzen eines Moleküls

Ein einfaches Modell für ein dreiatomiges Molekül ist eine lineare Anordnung dreier Massepunkte, die durch masselose Federn miteinander verbunden sind. Berechnen Sie die Eigenschwingungen des Systems für den Fall zweier gleicher äußerer Massen m , innerer Masse M und gleicher Federkonstanten k .

Hinweis: Zeigen Sie, daß Sie mit dem Ansatz $x_j = A_j \sin(\omega t)$ aus den Bewegungsgleichungen

$$\begin{array}{c} m \quad k \quad M \quad k \quad m \\ \odot \quad \text{---} \quad \odot \quad \text{---} \quad \odot \\ | \quad \quad | \quad \quad | \\ \xrightarrow{x_1} \quad \xrightarrow{x_2} \quad \xrightarrow{x_3} \end{array} \quad m\ddot{x}_1 = -kx_1 + kx_2, \quad (6)$$

$$M\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3, \quad (7)$$

$$m\ddot{x}_3 = kx_2 - kx_3 \quad (8)$$

ein Eigenwertproblem erhalten und berechnen Sie dessen Eigenwerte (Eigenfrequenzen) und Eigenvektoren. Diskutieren Sie für die 3 Eigenschwingungen eine physikalische Interpretation.

Bitte Rückseite beachten! →

Bonusaufgabe 16 (3 Zusatzpunkte): gekoppelte Massen

Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 , die sich auf einer Geraden bewegen und durch eine Feder mit der Federkonstanten k aneinander gekoppelt sind. Die linke Masse sei weiterhin durch eine Feder mit gleicher Federkonstante k an eine Wand links gekoppelt, die rechte Masse sei frei. Stellen Sie das Differentialgleichungssystem auf und bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden dieses Systems.

Aufgabe 17 (8 Punkte): Propagator

In der Vorlesung wurde zur Lösung von linearen inhomogenen Systemen von Differentialgleichungen der Propagator eingeführt. Lösen Sie mit dieser Methode das Anfangswertproblem für den ungedämpften harmonischen Oszillator mit äußerer Kraft, $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Bestimmen Sie hierfür zunächst die Matrix $\exp(At)$ und bestimmen Sie dann einen allgemeinen Ausdruck für $x(t)$ für beliebiges $f(t)$.

Wenden Sie dieses Ergebnis für eine konstante Kraft $f(t) = f = \text{const}$ an, und geben Sie eine physikalische Interpretation an.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> • Donnerstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Sprechzeiten:	<ul style="list-style-type: none"> • Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744 • Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702 • Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628 • Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217 • Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217 • Christian Otto: Mi, 14-15 Uhr im EW 217 • Maria Richter: Di, 9-10 Uhr im EW 217
Tutorien:	<ul style="list-style-type: none"> • Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang • Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang • Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter • Di 08–10 Uhr EW 015 Christian Otto • Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner • Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto • Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel • Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter

Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105