

**6. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08****Abgabe: Fr. 30.05.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

**Aufgabe 17 (4 Punkte): Partielle Ableitungen**

Das Coulomb-Potential ist gegeben durch

$$V(|\mathbf{r}|) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|}$$

mit  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Die Kraft zwischen zwei geladenen Teilchen ist dann

$$F(|\mathbf{r}|) = -\text{grad}(V) \equiv -\left(\frac{\partial}{\partial x}V, \frac{\partial}{\partial y}V, \frac{\partial}{\partial z}V\right)^T.$$

Berechnen Sie diese Kraft. Berechnen Sie weiterhin

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V.$$

Berechnen Sie die Kommutatoren  $[\frac{\partial}{\partial i}, \frac{\partial}{\partial j}]V \equiv \frac{\partial}{\partial i}\frac{\partial}{\partial j}V - \frac{\partial}{\partial j}\frac{\partial}{\partial i}V$  mit  $(i \neq j) \in \{x, y, z\}$ .Überprüfen Sie ihr Ergebnis mit *Mathematica*. Zeichnen Sie  $V$  mit *Mathematica* in einem 3D Plot für feste Werte von  $z$ .**Aufgabe 18 (4 Punkte): Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen**

Zeigen Sie

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \delta_{nm}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \delta_{nm}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \exp\left(i\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-i\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \delta_{nm}. \quad (4)$$

**Aufgabe 19 (6 Punkte):** *Fourierreihen*

(a) Entwickeln Sie die Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -L < x < 0 \\ 1 & , 0 < x < L \end{cases}$$

im Intervall  $[-L, L]$  in: (1) eine komplexe Fourierreihe,

(2) eine sin-cos-Fourierreihe.

(b) Entwickeln Sie nun die periodische Funktion  $f(x) = x^2$  mit der Periode  $2\pi$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  in eine Fourierreihe. Berechnen Sie hiermit  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .**Aufgabe 20 (6 Punkte):** *Schwingende Saite*

Lösen Sie die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

auf dem Intervall  $[0, L]$ , wobei  $u(x, t)$  die Auslenkung der Saite am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  beschreibt. Die Saite sei an beiden Enden eingespannt. Es gilt also die Randbedingung (RB)

$$u(x = 0, t) = u(x = L, t) = 0.$$

Zu Beginn soll die Saite (genau) in der Mitte ausgelenkt sein, so dass sie eine Dreiecks-Gestalt hat. Es gelte also die Anfangsbedingung (AB)

$$\dot{u}(x, t = 0) = 0 \quad \text{und} \quad u(x, t = 0) = u_0(x).$$

Die Maximalauslenkung zum Zeitpunkt  $t = 0$  sei  $u_0(L/2) = u_m$ .*Zusatzaufgabe:* Plotten Sie die Lösung  $u(x, t)$  für verschiedene, feste Zeiten  $t$  mit *Mathematica*.

<i>Vorlesung:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Donnerstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202</li> </ul>
<i>Scheinkriterien:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mindestens 50% der Übungspunkte.</li> <li>• Bestandene Klausur.</li> <li>• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.</li> </ul>
<i>Sprechzeiten:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744</li> <li>• Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702</li> <li>• Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628</li> <li>• Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217</li> <li>• Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217</li> <li>• Christian Otto: Mi, 14-15 Uhr im EW 217</li> <li>• Maria Richter: Di, 9-10 Uhr im EW 217</li> </ul>
<i>Tutorien:</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch</li> <li>• Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch</li> <li>• Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang</li> <li>• Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang</li> <li>• Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter</li> <li>• Di 08–10 Uhr EW 015 Christian Otto</li> <li>• Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner</li> <li>• Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto</li> <li>• Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel</li> <li>• Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter</li> </ul>

**Klausur:** Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105