Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

2. Juni 2008

Prof. Dr. Tobias Brandes, Dipl.-Phys. Reinhard Vogel, Dipl.-Phys. Stefan Fruhner

7. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08

Abgabe: Fr. 06.06.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 21 (6 Punkte): *Legendre-Polynome*

Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}^n[-1,1]$ der Polynome bis zum Grad n auf dem Intervall $[-1,1]$ und definieren die folgende Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : \mathcal{P}^n[-1,1] \times \mathcal{P}^n[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (p,q) := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt in dem Vektorraum der Polynome bildet.

(b) Überprüfen Sie, ob die Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ des $\mathcal{P}^3[-1,1]$ orthogonal ist. Falls nicht, überführen Sie diese Funktionen mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in ein Orthonormalsystem.
Hinweis: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren für eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$:

$$u_1 = v_1 \qquad\qquad u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(v_k, u_i)}{(u_i, u_i)} u_i.$$

Beginnen Sie mit $u_1 = 1$.

(c) Die Legendre-Polynome lassen sich durch folgende einfache Formel von Rodriguez darstellen

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[(x^2-1)^k \right].$$

Begründen Sie, daß P_k ein Polynom k-ten Grades ist. Geben Sie die Polynome bis zum Grad 3 an und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis aus (b). Zeichnen Sie die Polynome in ein Diagramm.
Zusatz: Zeigen Sie, daß P_k und P_l für $k \neq l$ orthogonal sind. Berechnen Sie die Norm.

Aufgabe 22 (3 Punkte): *Parsevalsche Gleichung*

Gegeben ist eine Funktion f auf $[-L, L]$ mit ihrer komplexen Fourierreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\frac{n\pi}{L}x)$. Zeigen Sie die Gültigkeit der Parsevalschen Gleichung (Vollständigkeitsrelation)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x |f(x)|^2.$$

Begründen Sie, dass dies eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras ist.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Aufgabe 23 (6 Punkte): *Diffusionsgleichung*
Lösen Sie die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} n(x,t)$$

allgemein auf dem Intervall $[0, L]$, wobei $n(x,t)$ die Konzentration eines Stoffes am Ort x zur Zeit t beschreibt. An den Enden soll der Stoff nicht entweichen können. Es gilt also die Randbedingung $j(0,t) = j(L,t) = 0$ für die Stromdichte $j(x,t) = -D\frac{\partial}{\partial x} n(x,t)$. Zu Beginn ist die Konzentration gegeben durch $n(x,0) = n_0(x)$.
Bestimmen Sie anschließend die Lösung für die Anfangskonzentration

$$n_0(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & (L-\varepsilon) < 2x < (L+\varepsilon), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und diskutieren Sie den Fall $\varepsilon \to 0$. Beschreiben Sie das zeitliche Verhalten.

Aufgabe 24 (5 Punkte): *Fouriertransformation*

(a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fouriertransformation $\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) \exp(i\omega t)$:

(1)	$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha\mathcal{F}[f](\omega) + \beta\mathcal{F}[g](\omega)$	(Linearität)
(2)	$\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega\mathcal{F}[f](\omega)$	(Ableitung)
(3)	$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = \exp(i\omega t_0)\mathcal{F}[f](\omega)$	(Verschiebungssatz)

(b) Berechnen und diskutieren Sie die Fouriertransformierte

(1) der Kastenfunktion $f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T, \\ 0 & |t| > T, \end{cases}$

(2) von $f(t) = \exp(-|t|)$.

Vorlesung:
- Donnerstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Sprechzeiten:
- Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744
- Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702
- Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628
- Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217
- Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217
- Christian Otto: Mi, 14-15 Uhr im EW 217
- Maria Richter: Di, 9-10 Uhr im EW 217

Tutorien:
- Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch
- Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch
- Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang
- Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang
- Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter
- Di 08–10 Uhr EW 015 Christian Otto
- Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner
- Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto
- Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel
- Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter

Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105