

8. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08**Abgabe: Fr. 13.06.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 25 (6 Punkte): Delta-Funktion

Die Diracsche Deltafunktion kann dargestellt werden als

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0.$$

Beweisen Sie folgende Eigenschaften:

- (a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1,$
- (b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0),$
- (c) $\delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x) \quad , \quad c \neq 0,$
- (d) $x\delta(x) = 0,$
- (e) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x) f(x) = -f'(0),$

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}.$ **Aufgabe 26 (6 Punkte): Inverse Fourier-Transformation**

- (a) Verwenden Sie das Gauß-Integral (vgl. A25), um zu zeigen, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2 + bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie eine quadratische Ergänzung.

- (b) Nutzen Sie das Ergebnis aus (a), um die Fourier-Transformierte der Gauß-Verteilung

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0.$$

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

- (c) Leiten Sie so die Fourier-Darstellung der Deltafunktion

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}$$

ab.

- (d) Zeigen Sie damit, dass eine Fourier-Transformation

$$\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \quad \text{durch} \quad f(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx}$$

invertiert wird.

Bitte Rückseite beachten! →

Aufgabe 27 (2 Punkte): *Fourier-Transformation*

Zeigen Sie den Faltungssatz (vgl. Vorlesung)

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g].$$

Aufgabe 28 (7 Punkte): *Diffusionsgleichung Teil 2*

Lösen Sie die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}n(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}n(x, t)$$

auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ mit Hilfe der Fouriertransformation.Als Anfangskonzentration $n(x, 0) = n_0(x)$ wird eine Gaußverteilung $n_0(x) = \frac{\bar{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$ angenommen. Diskutieren Sie das Ergebnis.

<i>Vorlesung:</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Donnerstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202
<i>Scheinkriterien:</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
<i>Sprechzeiten:</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744 • Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702 • Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628 • Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217 • Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217 • Christian Otto: Mi, 14-15 Uhr im EW 217 • Maria Richter: Di, 9-10 Uhr im EW 217
<i>Tutorien:</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang • Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang • Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter • Di 08–10 Uhr EW 015 Christian Otto • Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner • Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto • Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel • Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter

Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105