Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

11. Juni 2008

Prof. Dr. Tobias Brandes, Dipl.-Phys. Reinhard Vogel, Dipl.-Phys. Stefan Fruhner

9. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik SS08

Abgabe: Fr. 20.06.2008 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben! Die Abgabe kann in Zweiergruppen erfolgen.

Aufgabe 29 (4 Punkte): *Ebene Kurven - Spirale*

Eine logarithmische Spirale lässt sich am einfachsten in Polarkoordinaten angeben:

$$r(\varphi) = \mathrm{e}^{k\varphi} \qquad \text{mit} \quad k > 0\,.$$

(a) Geben Sie eine Parameterform in kartesischen Koordinaten an.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge vom Ursprung ausgehend. Geben Sie die Spirale durch die Bogenlänge parametrisiert an.

(c) Wir erzeugen zwei neue Spiralen $r_1(\varphi_1)$ und $r_2(\varphi_2)$ durch Streckung/Stauchung um einen Faktor a (d.h. $r_1 = ar$) und durch Drehung um einen Winkel ψ (d.h. $\varphi_2 = \varphi + \psi$). Vergleichen Sie beide Spiralen.

*Z*usatz Berechnen Sie die Skalarprodukt zwischen dem (normierten) Tangentialvektor an die Spirale und den Vektoren der Koordinatenbasis $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 30 (2 Punkte): *Wdh. Kreuzprodukt und Epsilon-Tensor*
Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Komponenten des Kreuzproduktes $\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ die Beziehung $a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$. Zeigen Sie mittels dieser Definition folgende Identitäten:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

Hinweis: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

Aufgabe 31 (7 Punkte): *Kinematik im Schwimmbad-Schraubenlinie*
Paul sieht im Schwimmbad eine Rutsche in der Form einer Schraubenlinie. Als angehender Physiker möchte er nichts dem Zufall überlassen. Vor der Rutschpartie überlegt er sich daher Folgendes: Wenn ich, idealisiert als Massenpunkt der Masse m, mit der Kreisfrequenz ω auf dieser Schraubenlinie mit dem Radius R um die z-Achse herumrutsche, bedeutet dies, dass die Projektion der Bahnkurve auf die x, y-Ebene eine Kreisbahn mit dem Radius R ist. Falls meine Geschwindigkeit in z-Richtung den Betrag v_z hat und ich zum Zeitpunkt $t = 0$ den Punkt $\mathbf{P} = (R, 0, 0)$ passiere kann ich mir meine Bahn im Vorhinein überlegen. Sie können Paul nun dabei helfen:

(a) Geben Sie die Bahnkurve für diese Bewegung an.

(b) Berechnen Sie die in der Zeit t zurückgelegte Weglänge $s(t) = \int_0^t |\frac{d\mathbf{r}(t')}{dt'}| dt'$ und drücken Sie $\mathbf{r}$ als Funktion von s aus.

(c) Berechnen Sie die Tangenten-, Normalen- und Binormalen-Einheitsvektoren $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ und $\mathbf{b}$, die das begleitende Dreibein bilden.

(d) Berechnen Sie außerdem die Krümmung K und die Torsion τ.

Bitte Rückseite beachten! ⟶

Aufgabe 32 (4 Punkte): *Frenetsche Formeln*

(a) Gegeben sei eine (mindestens drei mal differenzierbare) Kurve $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, welche durch die Bogenlänge s parametrisiert ist (d.h. $|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}(s)| = |\mathbf{r}'(s)| = 1 \quad \forall s$) Zeigen Sie, dass aus der Definition des Tangentenvektors $\mathbf{t}$, des Normalenvektors $\mathbf{n}$ und des Binormalenvektors $\mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{t} := \mathbf{r}' \qquad \mathbf{n} := \mathbf{t}'/|\mathbf{t}'| \qquad \mathbf{b} := \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$

die Frenetschen Gleichungen

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n} \qquad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b} \qquad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$$

folgen. Hierbei bezeichnet $\kappa = |\mathbf{t}'|$ die Krümmung und $|\tau| = |\mathbf{b}'|$ die Torsion.

Hinweis: Aus $|\mathbf{e}(s)| = 1 \quad , \forall s$ folgt $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' = 0$ (Beweis = Zusatz).

(b) Zeigen Sie, dass die Frenetschen Gleichungen kurz geschrieben werden können als

$$\mathbf{e}_i' = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_i.$$

Hierbei ist $\mathbf{e}_1 = \mathbf{t}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{b}$ und $\mathbf{k} = k_i\mathbf{e}_i$. Bestimmen Sie die Komponenten von $\mathbf{k}$.

Aufgabe 33 (3 Punkte): *Krumme Koordinaten*

(a) Berechnen Sie die kontravariante Basis und die Metrikkoeffizienten zur kovarianten Basis

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad \text{des} \quad \mathbb{R}^2.$$

(b) Zeigen Sie $\qquad x_i = g_{ij}x^j \quad x^i = g^{ij}x_j.$

Vorlesung:	• Donnerstag 8:00 Uhr – 10:00 Uhr im EW 202
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte. • Bestandene Klausur. • Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
*S*prechzeiten:	• Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo: 13–14 Uhr im EW 744 • Dipl.-Phys. Reinhard Vogel: Do, 11–12 Uhr im EW 702 • Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Di, 14–15 Uhr im EW 627/628 • Uyen Dang: Do, 14–15 Uhr im EW 217 • Martin Kliesch: Mi, 16–17 Uhr im EW 217 • Christian Otto: Mi, 14-15 Uhr im EW 217 • Maria Richter: Di, 9-10 Uhr im EW 217
Tutorien:	• Mo 10–12 Uhr EW 731 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 229 Martin Kliesch • Mo 12–14 Uhr EW 246 Uyen Dang • Mo 14–16 Uhr EW 731 Uyen Dang • Mo 16–18 Uhr EW 226 Maria Richter • Di 08–10 Uhr EW 015 Christian Otto • Di 12–14 Uhr EW 246 Stefan Fruhner • Di 12–14 Uhr ER 164 Christian Otto • Mi 10–12 Uhr EW 246 Reinhard Vogel • Mi 10–12 Uhr EW 184 Maria Richter

Klausur: Donnerstag den 10.07.2008 von 08:00 – 10:00 Uhr im H 0105