Zusammenfassung der 17. Vorlesung (28.04.08)

1.4.8 *Das "Entanglement of Formation" (Fortsetzung)*:

Als **"Concurrence Function"** $C : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathbf{R}_0^+$ bezeichnet man eine Funktion, wenn für $\Psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$E(\Psi) = F \circ C(\Psi)$$

mit einer monoton wachsenden und konvexen Funktion $F : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ gilt. Für jede reine Zerlegung eines Dichteoperators, $\rho = \sum_i p_i |\Psi_i >< \Psi|$ gilt dann

$$F\left(\sum_i p_i C(\Psi_i)\right) \leq \sum_i p_i F \circ C(\Psi_i) = \sum_i p_i E(\Psi_i),$$

und die Gleichheit gilt genau dann, wenn ρ rein ist oder die "Concurrencies" der reinen Komponenten übereinstimmen, d.h. $C(\Psi_i) = C(\Psi_k)$ gilt. Solche Zerlegungen von ρ sind also gute Kandidaten für eine optimale Zerlegung mit $E_f(\rho) = \sum_i p_i E(\Psi_i)$.

1.4.8 *Das "Entanglement of Formation" für bipartite Qubitzustände, die Wootters Formel*:

Für reine Qubitzustände lässt sich eine "Concurrence" Funktion leicht konstruieren. Es gilt ja

$$\Psi = \sum_{x,y=0}^{1} \alpha_{xy} |xy >= \sum_{i=1}^{2} c_i \varphi_i \otimes \psi_i, \quad c_1 \geq c_2 \geq 0$$

wobei sich die Orrthonormalbasen $\{\varphi_i\}$ und $\{\psi_i\}$ aus der Computerbasis durch unitäre Transformationen ergeben.

$$C(\Psi) := 2|\det \alpha_{xy}| = 2c_1c_2$$

hat die Eigenschaften einer "Concurrence" Funktion. Wegen $1 = c_1^2 + c_2^2$ folgt

$$1 - (c_1^2 - c_2^2)^2 = 4c_1^2c_2^2 = C^2(\Psi),$$

und damit

$$\sqrt{1 - C^2(\Psi)} = c_1^2 - c_2^2 = 2c_1^2 - 1 = 1 - 2c_2^2,$$

also
$$c_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-C^2(\Psi)}), \qquad c_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-C^2(\Psi)}).$$
Folglich gilt
$$E(\Psi) = -(c_1^2 \log_2 c_1^2 + c_2^2 \log_2 c_2^2) = F \circ C(\Psi)$$
mit
$$\begin{aligned} F(x) &= -\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x^2})\log_2 \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x^2})\right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-x^2}\log_2 \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-x^2})\right). \end{aligned}$$
Zu zeigen bleibt, dass F monoton wachsend und konvex ist. Sei
$$f(y) = -(\frac{1}{2}(1+y)\log_2 \frac{1}{2}(1+y) + \frac{1}{2}(1-y)\log_2 \frac{1}{2}(1-y)),$$
dann ist mit $y = \sqrt{1-x^2}$ für $x \in [0,1]$
$$F'(x) = f'(y)y' = -\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\log_2 \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \geq 0,$$
also ist F monoton wachsend. Ferner ist
$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{y}\log_2 \frac{1+y}{1-y} + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{y}\log_2 \frac{1+y}{1-y}\right)' y' = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{y^3}\left(\ln \frac{1+y}{1-y} - y\right) \\ &= \frac{1}{\ln 2 y^3}\left(2\sum_1^\infty \frac{1}{2k-1}y^{2k-1} - y\right) \geq \frac{1}{\ln 2y^3}(2y-y) = \frac{1}{2\ln 2}\frac{1}{y^2} \\ &= \frac{1}{2\ln 2}\frac{1}{1-x^2} \geq 0. \end{aligned}$$
Also ist F auch konvex. Somit ist C eine “Concurrence” Fuktion.

Diese “Concurrence” Fuktion kann auch auf eine andere Weise dargestellt werden: Eine Komplexkonjugation auf einem Hilbertraum ist ein Operator $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, für den $I^2 = \mathbf{1}$ und $< I\varphi | I\psi > = < \psi|\varphi >$ gilt. Solch eine Transformation ist antilinear, denn für beliebiges φ gilt
$$\begin{aligned} < \varphi | I(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) > &= < I^2\varphi | I(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) > = \\ < (c_1\psi_1 + c_2\psi_2) | I\varphi > &= \bar{c}_1 < \psi_1 | I\varphi > + \bar{c}_2 < \psi_2 | I\varphi > = \\ \bar{c}_1 < \varphi | I\psi_1 > + \bar{c}_2 < \varphi | I\psi_2 > &= < \varphi | (\bar{c}_1 I\psi_1 + \bar{c}_2 I\psi_2) > . \end{aligned}$$