Zusammenfassung der 18. Vorlesung (02.05.08)

1.4.8 *Das "Entanglement of Formation" (2.Fortsetzung)*:

Ist $\{\varphi_i\}$ eine vollständige Orthonormalbasis in $\mathcal{H}$, dann ist

$$I : \psi = \sum_i c_i \varphi_i \quad \longmapsto \quad \overline{\psi} = \sum_i \overline{c}_i \varphi_i$$

eine Komplexkonjugation, denn neben $I^2 = 1$ gilt mit $\chi = \sum_i d_i \varphi_i$ auch

$$< I\psi, I\chi > \quad = \quad \sum_i c_i \overline{d}_i \quad = \quad < \chi, \psi > .$$

Umgekehrt gibt es zu jeder Komplexkonjugation eine Klasse von Orthonormalbasen mit dieser Eigenschaft.

Wir betrachten nun in $\mathbf{C}^2$ die dergestalt auf die Basis $|0>$, $|1>$ bezogene Komplexkonjugation. Dann gilt für jedes $\psi \in \mathcal{C}^2$ mit $\psi = \alpha|0> + \beta|1>$

$$< \psi, \sigma_2 I \psi > \quad = \quad i(\alpha\beta - \beta\alpha) \quad = \quad 0.$$

Da ψ Eigenvektor zu einer bestimmten Spinprojektion ist, bedeutet

$$\psi \mapsto \tilde{\psi} := \sigma_2 I \psi$$

die Umkehr dieses Spins. Diese Operation heißt deshalb **spin-flip**. Überdies gilt offenbar $\|\psi\| = \|\tilde{\psi}\|$. Jeder bipartite Qubit Zustand kann deshalb in Schmidtdarstellung als

$$\Psi = c_1 \varphi \otimes \psi + c_2 (e^{i\delta} \tilde{\varphi}) \otimes \tilde{\psi}$$

geschrieben werden. Aufgrund der Antilinearität von I ist $\sigma_2 I = -I\sigma_2$, so dass $\sigma_2 I \sigma_2 I = -\sigma_2^2 I^2 = -1$ ist. Die concurrence-function des reinen Zustands Ψ kann deshalb mit

$$\tilde{\Psi} := (\sigma_2 I \otimes \sigma_2 I)\Psi = c_1 \tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi} + c_2 (e^{-i\delta} \varphi) \otimes \psi.$$

durch

$$C(\Psi) = | < \Psi, \tilde{\Psi} > | = \mathrm{tr}(| < \Psi, \tilde{\Psi} > | |\Psi >< \Psi|)$$

ausgedrückt werden. Den letzten Ausdruck kann man noch geeignet umformen, so dass er auch für Dichteoperatoren Sinn macht:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(| < \Psi, \tilde{\Psi} > || \Psi >< \Psi|) &= \operatorname{tr}(\sqrt{< \Psi, \tilde{\Psi} >< \tilde{\Psi}|\Psi >}|\Psi >< \Psi|) \\
&= \operatorname{tr}(\sqrt{< \Psi, \tilde{\Psi} >< \tilde{\Psi}|\Psi > |\Psi >< \Psi|}) \\
&= \operatorname{tr}(\sqrt{|\Psi >< \Psi|\tilde{\Psi} >< \tilde{\Psi}|\Psi >< \Psi|}) \\
&= \operatorname{tr}(\sqrt{|\Psi >< \Psi||\tilde{\Psi} >< \tilde{\Psi}||\Psi >< \Psi|}) \\
&= \operatorname{tr}(\sqrt{\sqrt{|\Psi >< \Psi|}|\tilde{\Psi} >< \tilde{\Psi}|\sqrt{|\Psi >< \Psi|}}).
\end{aligned}$$

In den letzten beiden Gliedern der Gleichungkette stehen nur die Dichteoperatoren der reinen Zustände Ψ und $\tilde{\Psi}$, und der Eigenwert des hermiteschen Operators $\sqrt{\sqrt{|\Psi >< \Psi|}|\tilde{\Psi} >< \tilde{\Psi}|\sqrt{|\Psi >< \Psi|}}$ vom Rang 1 ist $C(\Psi)$. Dies motiviert für gemischte Zustände die Abbildung

$$\rho = \sum_i p_i|\Phi_i >< \Phi| \quad \longmapsto \quad \tilde{\rho} = \sum_i p_i|\tilde{\Phi} >< \tilde{\Phi}|$$

und den positiven hermiteschen Operator

$$R(\rho) \quad := \quad \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}.$$

zu definieren. Tatsächlich bestimmen die Eigenwerte von $R(\rho)$ das entanglement of formation von ρ. Wir zeigen zunächst, dass jeder Dichteoperator ρ von $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ eine reine Zerlegung $\rho = \sum_i q_i|\Psi_i >< \Psi_i|$ mit $C(\Psi_i) = C(\Psi_j) = \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ hat. wobei λ_k die Eigenwerte von $R(\rho)$ sind, unter denen λ_0 der größte ist. Dann zeigen wir, dass solche Zerlegungen optimal sind.