Zusammenfassung der 19. Vorlesung (09.05.08)

1.4.8 *Das "Entanglement of Formation" (3.Fortsetzung)*:

Lemma: Sei ρ Dichteoperator in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Ist dann $\mathcal{C}(\rho) := \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$, dann gibt es eine reine Zerlegung $\rho = \sum_i s_i |\Upsilon_i >< \Upsilon_i|$ mit $C(\Upsilon_i) = \mathcal{C}(\rho)$.

Beweis: Seien

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} p_i |\Phi_i >< \Phi_i|, \qquad R(\rho) = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Sigma_i >< \Sigma_i|$$

Spektralzerlegungen und U der durch $U\Sigma_i = \Phi_i$ defionierte unitäre Operator. D.h. es gilt $U_{il} :=< \Phi_i, U\Phi_l >= \overline{< \Phi_l, U^+\Phi_i l >} =< \Sigma_i, \Phi_l >$ und

$$UR(\rho)U^+ = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Phi_i >< \Phi_i|.$$

Wir ändern nun die Zerlegung von ρ in reine Komponenten durch

$$\sqrt{q_k}\Psi_k := \sum_{l=0}^{3} \overline{U}_{kl} \sqrt{p_l} \Phi_l, \quad \text{und mithin} \quad \sqrt{q}_k \tilde{\Psi}_k := \sum_{l=0}^{3} U_{kl} \sqrt{p_l} \tilde{\Phi}_l,$$

weil $\sigma_2 I \otimes \sigma_2 I$ eine antilineare Transformation ist. Damit ist dann

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} q_i |\Psi_i >< \Psi_i|, \quad \text{und} \quad \tilde{\rho} = \sum_{i=0}^{3} q_i |\tilde{\Psi}_i >< \tilde{\Psi}_i|.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{3} \lambda_i^2 |\Phi_i >< \Phi_i| &= UR^2(\rho)U^+ = U\sqrt{\rho}\tilde{\rho}\sqrt{\rho}U^+ \\ &= \sum_{i,k,n} U\sqrt{q_i q_n} |\Phi_i >< \Phi_i|\tilde{\Phi}_n >< \tilde{\Phi}_n|\Phi_k >< \Phi_k|\sqrt{q_n q_k} U^+, \end{aligned}$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
\lambda_j^2 \delta_{jl} &= \sum_{i,k,n} Uji\sqrt{q_i q_n}| < \Phi_i|\tilde{\Phi}_n >< \tilde{\Phi}_n|\Phi_k > \sqrt{q_n q_k}\overline{U}_{lk} \\
&= \sum_{i,k,,m,n,n'} Uji\sqrt{q_i q_n}| < \Phi_i|\tilde{\Phi}_n > U_{mn}\overline{U}_{mn'} < \tilde{\Phi}_{n'}|\Phi_k > \sqrt{q_{n'} q_k}\overline{U}_{lk} \\
&= \sum_{i,k,,m,n,n'} < \overline{U}ji\sqrt{q_i}|\Phi_i|U_{mn}\sqrt{q_n}\tilde{\Phi}_n >< U_{mn'}\sqrt{q_{n'}}\tilde{\Phi}_{n'}|\overline{U}_{lk}\sqrt{q_k}\Phi_k > \\
&= \sum_m \sqrt{q_j q_m} < \Psi_j|\tilde{\Psi}_m >< \tilde{\Psi}_m|\Psi_l > \sqrt{q_l q_m} \\
&= \sum_m T_{jm} T^+_{ml},
\end{aligned}
$$

wobei

$$
T := \sum_{l,m} |\phi_l > \sqrt{q_l q_m} < \Psi_l|\tilde{\Psi}_m >< \Phi_m|
$$

ist. T erfüllt also

$$
TT^+ = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i^2 |\Phi_i >< \Phi_i| \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{TT^+} = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Phi_i >< \Phi_i|.
$$

Überdies gilt in der Eigenbasis $\{\Phi_i\}$ von ρ

$$
\begin{aligned}
< \Psi_i|\tilde{\Psi}_k > &= < \Psi_i|(\sigma_2 \otimes \sigma_2)(I \otimes I)\Psi_k >=< (\sigma_2 \otimes \sigma_2)\Psi_i|(I \otimes I)\Psi_k > \\
&= < (I \otimes I)^2(\sigma_2 \otimes \sigma_2)\Psi_i|(I \otimes I)\Psi k >=< \Psi_k|(I \otimes I)(\sigma_2 \otimes \sigma_2)\Psi_i > \\
&= < \Psi_k|(\sigma_2 \otimes \sigma_2)(I \otimes I)\Psi_i >=< \Psi_k|\tilde{\Psi}_i > .
\end{aligned}
$$

Es ist also $T = T^T$ in der Eigenbasis $\{\Phi_i\}$ von ρ. Wir verwenden nun folgenden Satz aus der Matrizenalgebra:

***Satz**: Sei T_{jk} eine komplexe $(N \times N)$-Matrix und $T_{jk} = T_{kj}$, dann gibt es eine unitäre Matrix V_{ij} mit $\sum_{jk} V_{ij} T_{jk} V_{lk} = (\sqrt{TT^+})_{il}$.*

Mit der auf die Basis $\{\Phi_i\}$ bezogenen Transposition gilt also

$$
UR(\rho)U^+ = \sqrt{TT^+} = VTV^T = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i |\Phi_i >< \Phi_i|.
$$

Wir ändern nun wieder die Zerlegung von ρ in reine Komponenten durch

$$\sqrt{r_k}\Theta_k := \sum_{l=0}^{3} \overline{V_{kl}}\sqrt{q_l}\Psi_l, \quad \text{und mithin} \quad \sqrt{r_k}\tilde{\Theta}_k := \sum_{l=0}^{3} V_{kl}\sqrt{q_l}\tilde{\Psi}_l.$$

Dann ist

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i|\Theta_i >< \Theta_i|$$

und für die reinen Komponenten gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{r_i r_k} < \Theta_i|\tilde{\Theta}_k > &= \sum_{jl} V_{ij}V_{kl}\sqrt{q_j q_l} < \Psi_j|\tilde{\Psi}_l > \\ &= \sum_{jl} V_{ij}T_{jl}V_{kl} = \sqrt{TT^+}_{ik} = \lambda_i\delta_{ik}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun noch $\Xi_0 := \Theta_0$ und $\Xi_\nu := i\Theta_\nu$ für $\nu = 1, 2, 3$, dann gilt

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i|\Xi_i >< \Xi_i|,$$

aber anstelle von

$$\sum_i r_i < \Theta_i|\tilde{\Theta}_i >= \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

gilt

$$\begin{aligned} \sum_i r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > &= r_0 < \Theta_0|\tilde{\Theta}_0 > + \sum_{\nu=1}^{3} r_\nu(-i)^2 < \Theta_\nu|\tilde{\Theta}_\nu > \\ &= \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = \mathcal{C}(\rho) \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Falls $\mathcal{C} > 0$ ist, dann findet man eine reine Zerlegung

$$\rho = \sum_i s_i|\Upsilon_i >< \Upsilon_i| \quad \text{mit} \quad C(\Upsilon_i) = \mathcal{C}(\rho).$$

Die Gleichungen

$$\sqrt{s_j}\Upsilon_j = \sum_{i=0}^{3} \overline{W}_{ji}\sqrt{r_i}\Xi_i, \qquad \sum_{j=0}^{3} W_{ji}\overline{W}_{jk} = \delta_{jk}$$

mit den Unbestimmten W_{jk} führen auf

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\rho) &= <\Upsilon_i|\tilde{\Upsilon}_i>=\frac{1}{s_i}\sum_{j,k} W_{ij}W_{ik}\sqrt{r_jr_k}<\Xi_j|\tilde{\Xi}_k> \\ &= \frac{1}{s_i}\sum_j W_{ij}W_{ij}r_j<\Xi_j|\tilde{\Xi}_j>\end{aligned}$$

Koppakter ausgedrückt lautet die Bestimmungsgleichung für fir W_{ij}

$$s_i=\sum_j (W_{ij})^2 f_j, \quad \text{wobei} \quad f_j=\frac{r_j<\Xi_j|\tilde{\Xi}_j>}{\mathcal{C}(\rho)},$$

d.h. $s_i \in \mathbf{R}$ und $f_j \in \mathbf{R}$ sind vorgegeben. Diese Vorgaben erfüllen $\sum_i s_i = 1$, $s_i \geq 0$ und wegen ♣ $\sum_j f_j = 1$, $f_0 \geq 0$, $f_\nu \leq 0$. Ist $\check{s}_i$ eine Permutation der s_i mit $\check{s}_0 \geq \check{s}_1 \geq \check{s}_2 \geq \check{s}_3$ und $\check{f}$ eine solche der f_j, dsnn definiert man: $\{f_j\} \succ \{s_i\}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\check{f}_0 &\geq \check{s}_0, & \check{f}_0+\check{f}_1 &\geq \check{s}_0+\check{s}_1, \\ \check{f}_0+\check{f}_1+\check{f}_2 &\geq \check{s}_0+\check{s}_1+\check{s}_2, & \check{f}_0+\check{f}_1+\check{f}_2+\check{f}_3 &\geq \check{s}_0+\check{s}_1+\check{s}_2+\check{s}_3.\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass die Vorgaben $\{f_j\} \succ \{s_i\}$ erfüllen. Damit sind die Voraussetzungen der folgenden Sätze aus der Matrizenalgebra erfüllt.

Satz: *Seien $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$, $\{y_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$, $x_i, y_j \in \mathbf{R}$, und $\{x_i\} \prec \{y_j\}$, dann und nur dann gibt es eine doppelt stochastische $(N \times N)$-Matrix D, d.h. $D_{ij} \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n D_{ij} = \sum_{j=1}^n D_{ij} = 1$, mit $x_i = \sum_j D_{ij}y_j$.*

Daraus folgt $s_i = \sum_j D_{ij}f_j$ mit einer doppelt stochastischen Matrix D. Wegen der paarweisen Orthonormalität der Zeilen und Spalten einer unitären Matrix erzeugen die Absolutquadrate der Elemente einer unitären Matrix eine doppelt stochastische Matrix. Es gilt aber auch die Umkehrung:

Satz: *Sei D eine doppelt stochastische $(N \times N)$-Matrix, dann gibt es eine unitäre $(N \times N)$-Matrix mit $D_{ij} = |U_{ij}|^2$.*

Natürlich bilden auch die quadrate von Orthogonalmatrizen eine doppelt stochastische Matrix. Jedoch wird nur eine Teilmenge der sdppelt stochastischen Matrizen erzeugt. Es gilt aber der Satz:

***Satz**: Seien $\{x_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$, $\{y_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$, $x_i, y_j \in \mathbf{R}$, und $\{x_i\} \prec \{y_j\}$, dann gibt es eine doppelt stochastische $(n \times n)$-Matrix D mit mit $x_i = \sum_j D_{ij} y_j$. und $D_{ij} = W_{ij}^2$, wobei W_{ij} einer Orthogonalmatrix ist.*

Dieser Satz behauptet also die Existenz der gesuchten unitären Matrix, die sogar eine Orthogonalmatrix ist, und $s_i = \sum_j W_{ij}^2 f_j$ erfüllt, so dass mit

$$\sqrt{s_j}\Upsilon_j = \sum_{i=0}^{3} W_{ji}\sqrt{r_i}\Xi_i, \qquad \rho = \sum_i s_i|\Upsilon_i >< \Upsilon_i|$$

die im Lemma behauptete reine Zerlegung mit

$$\mathcal{C}(\rho) = C(\Upsilon_i) = | < \Upsilon\tilde{\Upsilon}_i > | = \sum_i s_i C(\Upsilon_i)$$

ist.

Für das Folgende halten wir fest, dass wir die Vorausstzung $\mathcal{C}(\rho) > 0$ zur Heerleitung der Zerlegung

$$\rho = \sum_{i=0}^{3} r_i|\Theta_i >< \Theta_i| \quad \text{mit} \quad \sqrt{r_i r_k} < \Theta_i|\tilde{\Theta}_k >= \lambda_i \delta_{ik}$$

nicht benötigt haben, Wir werden die Existenz einer solchen Zerlegung noch verwenden.