Zusammenfassung der 20. Vorlesung (16.05.08)

1.4.8 *Das "Entanglement of Formation" (4.Fortsetzung)*:

Aus dem Beweis des Lemmas entnehmen wir noch das folgende Korollar:

Korollar: Sei ρ Dichteoperator in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien λ_i, $i = 0, 1.2, 3$, $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Unabhängig vom Vorzeichen von $\mathcal{C}(\rho) := \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$, gibt es eine reine Zerlegung $\rho = |\sum_{i=0}^{3} r_i|\Xi_i >< \Xi_i|$ mit $\sqrt{r_i r_k} < \Xi_i|\tilde{\Xi}_k >= \epsilon_i \lambda_i \delta_{ik}$, $\epsilon_0 = 1$ und $\epsilon_\nu = -1$, $\nu = 1, 2, 3$.

Trivialer Weise gilt $E_f(\rho) \leq F \circ \mathcal{C}(\rho)$. Wir zeigen nun aber, dass

$$\mathcal{C}(\rho) \leq \sum_{\mu=1}^{M} l_\mu C(\Lambda_\mu), \quad \text{wenn nur} \quad \rho = \sum_\mu l_\mu |\Lambda_\mu >< \Lambda_\mu|$$

gilt. Dazu können wir von der im Korollar behaupteten Existenz der reinen Zerlegung in die $|\Xi_i >< \Xi_i|$ ausgehen und für Λ_μ

$$\sqrt{l_\mu}\Lambda_\mu = \sum_{i=1}^{3} s_{\mu i}\sqrt{r_i}\,\Xi_i \quad \text{mit} \quad \sum_{\mu=1}^{N} s_{\mu i}\overline{s}_{\mu k} = \delta_{ik}$$

ansetzen. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{N} l_\mu C(\Lambda_\mu) &= \sum_{\mu=1}^{N} l_\mu | < \Lambda_\mu|\tilde{\Lambda}_\mu > | = \sum_{\mu=1}^{N} l_\mu \left| \sum_{i,k=0}^{3} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu k} \frac{\sqrt{r_i r_k}}{l_\mu} < \Xi_i|\tilde{\Xi}_k > \right| \\
&= \sum_{\mu=1}^{N} \left| \sum_{i=0}^{3} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right| \\
&= \sum_{\mu=1}^{N} \left| \frac{s_{\mu 0}}{\overline{s}_{\mu 0}} \sum_{i=0}^{3} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right| \\
&\geq \left| \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{i=0}^{3} \frac{s_{\mu 0}}{\overline{s}_{\mu 0}} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right| \\
&= \left| \sum_{\mu=1}^{N} \left(s_{\mu 0}\overline{s}_{\mu 0} r_0 < \Xi_i|\tilde{\Xi}_0 > + \sum_{i=1}^{3} \frac{s_{\mu 0}}{\overline{s}_{\mu 0}} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu i} r_i < \Xi_i|\tilde{\Xi}_i > \right) \right|,
\end{aligned}$$

und weiter

$$\sum_{\mu=1}^{N} l_\mu C(\Lambda_\mu) \ \geq \ \left| \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{N} \frac{s_{\mu 0}}{\overline{s}_{\mu 0}} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu i}\lambda_i \right| \geq \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{N} \left| \frac{s_{\mu 0}}{\overline{s}_{\mu 0}} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu i}\lambda_i \right|$$

$$= \ \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{N} \left| \frac{s_{\mu i}}{\overline{s}_{\mu i}} \overline{s}_{\mu i}\overline{s}_{\mu i}\lambda_i \right| = \lambda_0 - \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \mathcal{C}(\rho).$$

Damit gilt für $\mathcal{C}(\rho) > 0$ also für alle reinen Zerlegungen von ρ wegen der Konvexität und Monotonie von F auch

$$\sum_{mu} l_\mu E(\Lambda_\mu) = \sum_{mu} l_\mu F \circ C(\Lambda_\mu) \geq F(\sum_{mu} l_\mu C(\Lambda_\mu)) \geq F \circ \mathcal{C}(\rho),$$

also haben wir gezeigt:

Lemma: Sei ρ Dichteoperator in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien $\lambda_i,\ i = 0, 1.2, 3,\ \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Ist dann $\mathcal{C}(\rho) := \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 0$, dann ist $E_f \rho = F \circ \mathcal{C}(\rho)$.

Ferner gilt

Lemma: Sei ρ Dichteoperator in $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$, und seien $\lambda_i,\ i = 0, 1.2, 3,\ \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ die Eigenwerte von $R(\rho) := \sqrt{\sqrt{\rho} \quad \tilde{\rho} \quad \sqrt{\rho}}$. Ist dann $\mathcal{C}(\rho) := \lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \leq 0$, gibt es eine reine Zerlegung $\rho = |\sum_{i=0}^{3} d_i|\Delta_i >< \Delta_i|$ mit $C(\Delta_i) = 0,\ i = 0, 1, 2, 3$.

Beweis: Wir hatten die Zerlegung $\rho = \sum_i r_i |\Xi_i >< \Xi_i|$ im Korollar aus einer Zerlegung $\rho = \sum_i r_i |\Theta_i >< \Theta_i|$ mit der Eigenschaft $\sqrt{r_i r_k} < \Theta_i|\tilde{\Theta}_k >= \lambda_i \delta_{ik}$ durch Einführung geeigneter Pkasenfaktoren gewonnen. Von der letzteren Zerlegung gehen wir nun aus und verlangen mit

$$\sqrt{d_j}\Theta_j = \sum_k a_{jk}\sqrt{r_k}\Theta_k, \qquad \sum_j a_{jk}a_{jl} = \delta_{kl}$$

die Gültigkeit von

$$< \Theta_j|\tilde{\theta}_j >= \sum_{kl} \overline{a}_{jk}\overline{a}_{jl}\sqrt{r_k r_l} < \Theta_k|\overline{\Theta}_l >= \sum_k (\overline{a}_{jk})^2 \lambda_k = 0, \quad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Mit $\alpha = e^{-i(\epsilon/2)}$ uund $\beta = e^{-i(\mu/2)}$ ist

$$((a_{jk})) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & i \\ 1 & \alpha & -\beta & -i \\ 1 & -\alpha & \beta & -i \\ 1 & -\alpha & -\beta & i \end{pmatrix}$$

unitär, und

$$(((a_{jk})^2)) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 & -1 \\ 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 & -1 \\ 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 a & -1 \\ 1 & \overline{\alpha}^2 & \overline{\beta}^2 & -1 \end{pmatrix},$$

so dass sich die Bedingung auf

$$\lambda_0 + e^{i\epsilon}\lambda_1 + e^{i\mu}\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

reduziert, was wegen $\mathcal{C}(\rho) \leq 0$ stets erfüllbar ist.

Satz/Definition (Wootter's Formel): Für bipartite Qubitsysteme sei mit den Bezeichnungen in den Lemmata die "concurrence function"

$$\mathbf{C}(\rho) := \begin{cases} \mathcal{C}(\rho) & \text{falls} \quad \mathcal{C}(\rho) > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Das entanglement of formation ist dann $E_f(\rho) = F \circ C(\rho)$, wobei

$$\begin{aligned} F(x) \quad = \quad -\Bigg(& \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2} \log_2 \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2} \\ & + \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2} \log_2 \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2} \Bigg) \end{aligned}$$

ist.

Wegen $R(|\Psi >< \Psi|) = | < \Psi|\tilde{\Psi} > ||\Psi >< \Psi|$ ist $\lambda_i = | < \Psi|\tilde{\Psi} > |\delta_{i0}$ für reine Zustände, so dass die ursprünglich für reine Zustände eingeführte Funktion $C(\Psi)$ mit $\mathbf{C}(|\Psi >< \Psi|)$ übereinstimmt.