Zusammenfassung der 21. Vorlesung (23.05.08)

1.4.8 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

1.4.8 *Messoperationen*:

Den Bgriff Messoperation oder Quantenmessung haben wir schon mehrfach verwendet, aber den damit verbundenen Vorgang nicht genauer betrachtet. Dies soll nun geschehen.

Zunächst beschränken wir uns auf rein quantenmechanische Betrachtungen. Das Objekt, an dem gemessen werden soll, sei in dem Hilbertraum $\mathcal{H}_O$ beschrieben, und ein anderes Quantensystem, später der Messapparat, in dem Hilbertraum $\mathcal{H}_D$. Vor Beginn des Prozesses sollen die Systeme frei sein und sich in dem faktorisierenden Zustand $\rho \otimes \sigma_0$, wobei ρ der Zustand des Objekts und σ_o der des zweiten Systems ist, befinden. Die Wchselwirkung soll eine endliche Dauer haben. Zumindest sollen die Systeme asymptotisch zu frühen und späten Zeiten frei sein, wie es bei Streuprozessen gefordert wird. Von daher ist die Beschreibung durch einen S-Operator bekannt, der das Resultat dieses Prozesses durch eine unitäre Zustandsänderung

$$\rho \otimes \sigma_0 \quad \longmapsto \quad S(\rho \otimes \sigma_0)S^+$$

beschreibt. Wird nun die durch $D = D^+ = \sum_k kE_k$ auf $\mathcal{H}_D$, $E_k = E_k^+ = E_k^2$, $\sum_k E_k = \mathbf{1}$ dargestellte Observable am zweiten System gemessen, dann tritt der Wert k mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_k = \mathrm{tr}((\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+)$$

auf, und im Falle des Auftretens von k gehört das Gesamtsystem der Gesamtheit an, die mit dem Dichteoperator

$$\frac{1}{p_k}(\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+(\mathbf{1} \otimes E_k)$$

beschrieben wird. Durch Selektion nach dem Auftreten eines gewissen k kann diese Gesamtheit präpariert werden. Die Wahrscheinlichkeiten bei nachfolgenden Messungen am Objekt werden dann durch den reduzierten Dichteoperator

$$\rho_k = \mathrm{tr}_D(\frac{1}{p_k}(\mathbf{1} \otimes E_k)S(\rho \otimes \sigma_0)S^+(\mathbf{1} \otimes E_k))$$

auf $\mathcal{H}_O$ bebestimmt. Nun ist mit $E_k = \sum_{j_k} |\psi_{kj_k} >< \psi_{kj_k}|$, der Spektraldarstellung $\sigma_0 = \sum_{m=1}^K s_n |\phi_m >< \phi_m|$, einer beliebigen Orthonormalbasis $\{\varphi_\nu\}$ von $\mathcal{H}_O$, und der Orthonormalbasis $\{\phi_\alpha\}$ von $\mathcal{H}_D$, deren erste Elemente, $k = 1, 2, \ldots, K$, die Eigenvektoren von σ_0 sind:

$$\begin{aligned}
p_k\rho_k &= \sum_{\nu,\mu,j_k} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}| S(\rho \otimes \sigma_0) S^+ \varphi_\mu \otimes \psi_{kj_k} >< \varphi_\mu| \\
&= \sum_{\nu,\mu,j_k} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}| S(\mathbf{1} \otimes \sqrt{\sigma_0})(\rho \otimes \mathbf{1}) \\
&\quad (\mathbf{1} \otimes \sqrt{\sigma_0}) S^+ \varphi_\mu \otimes \psi_{kj_k} >< \varphi_\mu| \\
&= \sum_{\nu,\mu,j_k} \sum_{m,n=1}^K |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}| S(\mathbf{1} \otimes \sqrt{s_m} |\phi_m >< \phi_m|) \sum_{\sigma,\alpha} \varphi_\sigma \otimes \phi_\alpha > \\
&\quad < \varphi_\sigma \otimes \phi_\alpha | (\rho \otimes \mathbf{1}) \sum_{\sigma',\beta} \varphi_{\sigma'} \otimes \phi_\beta > \\
&\quad < \varphi_{\sigma'} \otimes \phi_\beta | (\mathbf{1} \otimes \sqrt{s_n} |\phi_n >< \phi_n|) S^+ \varphi_\mu \otimes \psi_{kj_k} >< \varphi_\mu| \\
&= \sum_{\nu,\mu,\sigma,\sigma',j_k} \sum_{m,n=1}^K |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}| S \sqrt{s_m} \varphi_\sigma \otimes \phi_m > \\
&\quad < \varphi_\sigma \otimes \phi_m | (\rho \otimes \mathbf{1}) \varphi_{\sigma'} \otimes \phi_n > \\
&\quad < \varphi_{\sigma'} \otimes \phi_n | \sqrt{s_n} S^+ \varphi_\mu \otimes \psi_{kj_k} >< \varphi_\mu| \\
&= \sum_{\nu,\mu,\sigma,\sigma',j_k} \sum_{m=1}^K s_m |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}| S \varphi_\sigma \otimes \phi_m >< \varphi_\sigma | \rho \varphi_{\sigma'} > \\
&\quad < \varphi_{\sigma'} \otimes \phi_m | S^+ \varphi_\mu \otimes \psi_{kj_k} >< \varphi_\mu|.
\end{aligned}$$

Mit

$$A_{km} := \sum_{\nu,\sigma,j_k,} |\varphi_\nu >< \varphi_\nu \otimes \psi_{kj_k}| S \varphi_\sigma \otimes \phi_m >< \varphi_\sigma|$$

ergibt sich

$$p_k\rho_k = \sum_m s_m A_{km} \rho A_{km}^+, \quad s_m \geq 0, \quad \sum_m s_m = 1.$$

Wird keine Selektion ausgführt, dann ist der Zustand des Objekts nach der Reaktion mit dem zweiten System

$$\rho' = \sum_k p_k \rho_k.$$

Wegen $\sum_k p_k = 1$ ist

$$1 = \mathrm{tr} \sum_k p_k \rho_k = \mathrm{tr}(\sum_{k,m} s_m A_{k,m} \rho A_{k,m}^+) = \mathrm{tr}(\sum_{k,m} s_m A_{k,l,j_l}^+ A_{k,m}) \rho)$$

und, weil ρ ein beliebiger Dichteoperator ist, folgt

$$\sum_{k,m} s_m A_{k,m}^+ A_{k,m} = \mathbf{1}.$$

Bisher haben wir keine Forderungen an die Wahl von σ_0, D und S gestellt. Um Dekohärenzen des Zustandes ρ zu vermeiden, die nicht mit der Bestmmung von Werte k von D verknüpft sind, fordert man $A_{k,m} = A_{k,n} =: A_k$, $m.n = 1, 2, \ldots, K$. Dann erhält man die von uns bisher verwendete Form der Messperation:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\rho) &= \sum_k A_k \rho A_k^+, \quad \sum_k A_k^+ A_k = \mathbf{1}, && \text{ohne Selektion;} \\ \mathcal{J}_k(\rho) &= \frac{1}{p_k} A_k \rho A_k^+, \quad p_k = \mathrm{tr}(A_k^+ A_k \rho), && \text{mit Selektion nach } k. \end{aligned}$$

Ist $k = 1, 2, \ldots, \dim \mathcal{H}_O$ und etwa $S(\varphi_k \otimes \phi_m) \in |\varphi_k >< \varphi_k| \otimes E_k$, dann gilt $A_{k,m} = A_{k,n} =: A_k$, $m.n = 1, 2, \ldots, K$ und $A_k = A_k^+ = A_k^2$ sind Orthogonalprojektoren, nämlich $|\varphi_k >< \varphi_k|$. Die Operation ist dann eine **Idealoperation**. Im allgemein Fall erzeugt $k \mapsto A_k^+ A_k$ ein positives operatorwertiges Maß, die Operation wird dann auch als unscharfe Messung bezeichnet, die entsprechende Observable wir dann auch "fuzzy observable" genannt. Im Idealfall ist das Maß rpojektionswertig und das Spektralmaß einer (scharfen) Observablen. Man kann den folgenden Satz beweisen:

Satz: Seien A_k lineare Operatoren auf $\mathcal{H}_O$ und sei $\sum_k A_k^+ A_k = \mathbf{1}$. Genau dann gibt es einen Hilbertraum $\mathcal{H}_D$, einen Dichteoperator σ_0 mit der Sprtraldarstellung $\sigma_0 = \sum_m |\phi_m >< \phi_m|$ und eine Observable $D = D^+ = \sum_k k E_k$ auf $\mathcal{H}_D$, sowie einen unitären Operator S auf $\mathcal{H}_O \otimes \mathcal{H}_D$, so dass

$$< \varphi_\mu, A_k \varphi_\nu > = \sum_{j_k} < \varphi_\mu \otimes \psi_{k,j_k}, S \varphi_\nu \otimes \phi_m > \qquad (m = 1, 2, \ldots, K)$$

gilt.

Nach dem Satz von Stinespring sind vollständig positive Abbildungen gerade surch die Darstellung $B \mapsto \sum_k C_k B C_k^+$ mit beschränkten linearen Operatoren C_k charakterisiert. Die Operationen $\mathcal{J}$ können deshalb als von der übrigen Welt isolierte, in Bezug auf die ganze Welt lokale Prozesse aufgefasst werden, was sehr befriedigend ist. $\mathcal{J}$ bzw. $\mathcal{J}_k$ sind als Operationen durch die Eigenschaft der vollständigen Posittivität und der Spurerhaltung charakterisiert.

Nun haben wir für das zweite, in $\mathcal{H}_D$ beschriebene, System nur vorausgeesetzt, dass es ein Quantensystem ist. Die Werte von D sind daher nicht direkt beobachtbar, sondern können nur durch eine weitere Messoperation am zweiten System bestimmt werden. Gäbe es nur Quantensysteme ohne weitere makroskopische und direkt beobachtbare Eigenschaften, dann müsste man erkären, wie man denn zur Kenntnis von k im Einzelfall gelangen kann. Johann v, Neumann vertrat die Auffassung, dass eine Kette aufeinanderfolgender Messoperationen bis in das Gehirn des Experimentators führt, dem schließlich der Wert k von D bewusst wird. Dann muss aber das Objektivierungsproblem gelöst werden, d.h. es muss erklärt werden, warum allen Experimentatoren die einen Fall beobachten, derselbe Wert von D bewusst wird. Hugh Everett und John Archbald Wheeler haben ddazu die **Vielwelteninterpretation** angeboten: Bei jeder Messung an einem Quantensystem spaltet sich die Welt in so viele Welten auf, als es verschiedene Wertte von D gibt und die sich nur dadurch unterscheine, dass dr Wert von D verschieden ist. Wenn diese Welten nicht miteinander kommunizieren können, ist das Objektivierungsproblem gelöst. Die Vielwelteninterpretation ist logisch nicht angreifbar. Man muss sie aber nicht anerkennen: Die Erfahrung zeigt, dass es **große Quantensysteme mit objektiv erkennbaren Eigenschaftten** gibt. Der Messapparat ist ein solches System. Er wird vor der Messung in einen metastabilen Zustand σ_o gebracht, der von dem Objekt so ggestört wird, dass der Apparat irreversibel in einen der verschidenen stabilen Gleichgewichtszustande , etwa $\sigma_k = (1/d_k)E_k$, übergeht, und so dass Messergebnis objektiv, anzeigt. Man setzt also voraus, dass der Messapparat ein so beschaffenes Vielteilchensystem ist, dass im Rahmen der quantenstatistischen Thermodynamik der irreversible Prozess

$$S(\rho \otimes \sigma_0)S^+ \quad \longrightarrow \quad \sum_k A_k \rho A_k^+ \otimes \sigma_k$$

erklärt werden kann.