Zusammenfassung der 22. Vorlesung (30.05.08)

1.4.8 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

1.4.8.2 *Das Nielsenrsche Theorem*:

Alice und Bob teilen sich einen bipartiten reinen Zustand Ψ. Alice und Bob haben die Möglichkeit an ihrem jeweiligen Teilchen die Operationen $\mathcal{J}_A$ und $\mathcal{J}_B$ durchzuführen.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_A(|\Psi><\Psi|) &= \sum_k (A_k \otimes \mathbf{1})|\Psi><\Psi|(A_k^+ \otimes \mathbf{1}), \quad \sum_k A_k^+ A_k = 1, \\
\mathcal{J}_B(|\Psi><\Psi|) &= \sum_l (\mathbf{1} \otimes B_l)|\Psi><\Psi|(\mathbf{1} \otimes B_l^+), \quad \sum_l B_l^+ B_l = 1.
\end{aligned}$$

Tun sie dies, dann teilen sie sich unabhängig von der Reihenfolge der Durchführung der Operationen den bipartiten Zustand

$$(\mathcal{J}_A \otimes \mathcal{J}_B)(|\Psi><\Psi|) = \sum_{k,l} (A_k \otimes B_l)|\Psi><\Psi|(A_k^+ \otimes B_l^+).$$

Alice hat die Möglichkeit, nach k zu selektieren, und Bob hat die Möglichkeit, nach l zu selektieren. Klassische Kommunikation erlaubt es ihnen also, die reinen Zustände

$$\Phi_{kl} = (A_k \otimes B_l)\Psi$$

zu präparieren. Das Nielsensche Theorem charakterisiert die Menge der Zustände, welche aus einem gegebenen reinen Zustand auf diese Weise präpariert werden können.

Der Beweis macht von der schon in der 19. Vorlesung benutzten Aussage Gebrauch, dass für zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ des $\mathbf{R}^n$ genau dann eine doppelt stochastische Matrix D mit $\vec{x} = D\vec{y}$ existiert, wenn die Menge $\{x_i\}$ der Komponenten von $\vec{x}$ von der Menge der Komponenten $\{y_k\}$ von $\vec{y}$ majorisiert wird, d.h. $\{x_i\} \prec \{y_k\}$ gilt. Diese Majorisierung ist so definiert: Zunächst werden die Komponenten nach der Größe umnumeriert, d.h. $\{\tilde{x}_l\} = \{x_i\}$, aber $\tilde{x}_l \geq \tilde{x}_{l+1}$, ebenso wird $\{\tilde{y}_l\}$ gebildet. Dann bedeutet $\{x_i\} \prec \{y_k\}$

$$\sum_{l=0}^{s} \tilde{x}_l \leq \sum_{l=0}^{s} \tilde{y}_l \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)).$$

Überdies machen wir im Beweis davon Gebrauch, dass es für jeden linearen Operator B auf $\mathcal{H}_B$ und gegebenem bipartiten reinen Zustand Ψ einen linearen Operator $\tilde{A}$ auf $\mathcal{H}_A$ und einen unitären Operator U auf $\mathcal{H}_B$ gibt, so dass

$$(1 \otimes B)\Psi = (\tilde{A} \otimes U)\Psi$$

gilt. Mithin kann

$$(\breve{A} \otimes B)\Psi = (A \otimes U)\Psi$$

geschrieben werden. Die Operation $(\mathcal{J}_A \otimes \mathcal{J}_B)(|\Psi >< \Psi|)$ kann deshalb durch

$$(\mathcal{J}_A \otimes \mathcal{J}_B)(|\Psi >< \Psi|) = \sum_{k,l} (A_{kl} \otimes U_l)|\Psi >< \Psi|A_{kl}^+ \otimes U_l^+)$$

ersetzt werden und nur Alice muss (k, l) ablesen und Bob das jeweilige Ergebinis mitteilen, der dann die unitäre Operation $(\mathbf{1} \otimes U_l)|\Psi >< \Psi|(\mathbf{1} \otimes U_l^+)$ an seinem Teilchen durchzuführen hat. Φ ist also genau dann aus Ψ durch lokale Operationen mit klassischer Kommunikation präparierbar, wenn es einen Operator A auf $\mathcal{H}_A$ mit $A^+A \leq \mathbf{1}$ und einen unitären Operator U auf $\mathcal{H}_B$ gibt, so dass

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{p}}(A \otimes U)\Psi \quad \text{wobei} \quad p = \mathrm{tr}((A^+A \otimes \mathbf{1})|\Psi >< \Psi|)$$

ist, denn die Operation

$$\begin{aligned} |\Psi >< \Psi| \quad &\longmapsto \\ &(A \otimes U)|\Psi >< \Psi|(A^+ \otimes U^+) + (A_c \otimes \mathbf{1})|\Psi >< \Psi|(A_c^+ \otimes \mathbf{1}), \end{aligned}$$

$A^+A + A_c^+A_c = \mathbf{1}$, leistet alles.

Satz (Nielsen): Seien $\mathcal{H}_A$ und $\mathcal{H}_B$ Hilberträume endlicher Dimension. Der bipartite reine Zustand Φ mit den Schmidtkoeffizienten d_i kann genau dann aus dem bipartiten reinen Zustand Ψ mit den Schmidtkoeffizienten c_i durch lokale Operationen und klassische Kommunikation (LOCC) präpariert werden, wenn $\{c_i^2\} \prec \{d_j^2\}$ gilt.

Beweis: $\Rightarrow$: Mit den Schmidtzerlegungen

$$\Psi = \sum_k c_k \varphi_k \otimes \psi_k, \qquad \Phi = \sum_l d_l \chi_l \otimes \eta_l,$$

wobei wir o.B.d.A annehemen können, dass $\{\varphi_k\}$, $\{\chi_l\}$ Orthonormalbasen in $\mathcal{H}_A$ und $\{\psi_k\}$, $\{\eta_k\}$ Orthonormalbasen in $\mathcal{H}_B$ sind, ist

$$\begin{aligned}
\rho_\Psi &:= \mathrm{tr}_B|\Psi >< \Psi| = \sum_k c_k^2 |\varphi_k >< \varphi_k|, \\
\rho_\Phi &:= \mathrm{tr}_B|\Phi >< \Phi| = \sum_l d_k^2 |\chi_l >< \chi_l|.
\end{aligned}$$

Weiter ist nach Voraussetzung

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{p}}(A \otimes U)\Psi \quad \text{mit} \quad p = \mathrm{tr}(A^+ A \rho_\Psi),$$

so dass aufgrund der freien Basiswahl in $\mathcal{H}_B$ bei der Bildung der partiellen Spur

$$\begin{aligned}
p\,\rho_\Phi &= \mathrm{tr}_B((A \otimes U)|\Psi >< \Psi|(A^+ \otimes U^+)) \\
&= \mathrm{tr}_B((A \otimes \mathbf{1})|\Psi >< \Psi|(A^+ \otimes \mathbf{1})) \\
&= \sum_{i,j,k,l,k',l',m} |\varphi_i >< \varphi_i \otimes \psi_j | A \otimes \mathbf{1} | \varphi_k \otimes \psi_l >< \varphi_k \otimes \psi_l | \Psi >< \Psi| \\
&\qquad\qquad |\varphi_{k'} \otimes \psi_{l'} >< \varphi_{k'} \otimes \psi_{l'} | A^+ \otimes \mathbf{1} | \varphi_m \otimes \psi_j >< \varphi_m| \\
&= \sum_{i,j,k,l,k',l',m} |\varphi_i >< \varphi_i | A | \varphi_k > \delta_{jl} < \varphi_k \otimes \psi_l | \Psi >< \Psi| \\
&\qquad\qquad |\varphi_{k'} \otimes \psi_{l'} > \delta_{jl'} < \varphi_{k'} | A^+ | \varphi_m >< \varphi_m| \\
&= \sum_{i,j,k,k',,m} |\varphi_i >< \varphi_i | A | \varphi_k >< \varphi_k \otimes \psi_j | \Psi >< \Psi| \\
&\qquad\qquad |\varphi_{k'} \otimes \psi_j >< \varphi_{k'} | A^+ | \varphi_m >< \varphi_m| \\
&= A \rho_\Psi A^+.
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Polardarstellungen

$$A\sqrt{\rho_\Psi} = \sqrt{A\rho_\Psi A^+}V = \sqrt{p\,\rho_\Phi}\,V, \quad A_c\sqrt{\rho_\Psi} = \sqrt{A_c\rho_\Psi A_c^+}\,V_c = \sqrt{(1-p)\,\rho_\Phi}\,V_c,$$

mit den unitären Operatoren V und V_c auf $\mathcal{H}_A$, dann findet man wegen $A^+A + A_c^+A_c = \mathbf{1}$

$$\rho_\Psi = \sqrt{\rho_\Psi}A^+A\sqrt{\rho_\Psi} + \sqrt{\rho_\Psi}A_c^+A_c\sqrt{\rho_\Psi} = pV^+\rho_\Phi V + (1-p)V_c^+\rho_\Phi V_c,$$

also

$$\sum_k c_k^2|\varphi_k><\varphi_k| = p\sum_l d_l^2 V^+|\chi_l><\chi_l|V + (1-p)\sum_l d_l^2 V_c^+|\chi_l><\chi_l|V_c.$$

Es folgt unmittelbar

$$c_k^2 = \sum_l (p|<\chi_l|V|\varphi_k>|^2 + (1-p)|<\chi_l|V_c|\varphi_k>|^2)d_l^2.$$

Die Mattrizen $((|<\chi_l|V|\varphi_k>|^2))$, $((|<\chi_l|V_c|\varphi_k>|^2))$ sind offenbar doppelt stochastisch und mithin ihre konvexe Linearkombination. Damit ist die Notwendigkeit von $\{c_i^2\} \prec \{d_j^2\}$ gezeigt.

$\Leftarrow$: Wir zeigen zunächst, dass diese Bedingung für $\mathbf{C}^2\otimes\mathbf{C}^2$ hinreicht. O.B.d.A- können wir annehmen, dass

$$\Psi = c_0|00> + c_1|11>, \quad \text{und} \quad \Phi = d_0|00> + d_1|11>$$

ist. Durch eine lokale unitäre Operation wandeln wir den Zustand Ψ um in

$$\begin{aligned}
\Psi' &= (|00>\ |01>\ |10>\ |11>)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ -c_1 & c_0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00>\ |01>\ |10>\ |11>)\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_0 & c_1 \\ -c_1 & c_0 & -c_1 & c_0 \\ c_0 & c_1 & -c_0 & -c_1 \\ -c_1 & c_0 & c_1 & -c_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00>\ |01>\ |10>\ |11>)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c_0^2 - c_1^2 \\ -2c_0c_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|00> - \frac{1}{\sqrt{2}}((c_1^2 - c_0^2)|10> + 2c_2c_1|11>) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}|00> - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha|10> + \sin\alpha|11>),
\end{aligned}$$

wobei

$$\cos\alpha = -(c_0^2 - c_1^2) = -(2c_0^2 - 1), \qquad \sin\alpha = 2c_0c_1 = 2c_0\sqrt{1-c_0^2}.$$

(Fortsetzung folgt)