Zusammenfassung der 23. Vorlesung (06.06.08)

1.4.8 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

1.4.8.2 *Das Nielsenrsche Theorem (Fortsetzung)*:

Wir setzen den Beweis der Hinlänglichkeit von $\{c_0^2, c_1^2\} \prec \{d_0^2, d_1^2\}$ fort, indem wir eine Messoperation konstruiueren, die den Zustand

$$\Psi' = \frac{1}{\sqrt{2}}|00> - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha|10> + \sin\alpha|11>),$$

dessen Schmidkoeffizienten mit denen von Ψ übereubstimmen, in ein Gemisch von reinen Zuständen mit Schmidtkoeffizienten d_o, d_1 umwandelt. Dazu definieren wir

$$A = r_0|0><0| + r_1|1><1| \quad \text{und} \quad A_c = r_1|0><0| + r_0|1><1|,$$

wobei ´

$$r_0^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right), \qquad r_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right).$$

Nun ist

$$A^+A + A_c^+A_c = (|r_0|^2 + |r_1|^2)\mathbf{1}$$

und mit $r_i = x_i + iy_i$ ferner

$$1 = r_0^2 + r_1^2 = x_0^2 + x_1^2 - (y_0^2 + y_1^2) + 2i(x_0y_0 + x_1y_1) \leq |r_0|^2 + |r_1|^2.$$

Folglich ist $(Q/2)^2 \leq 1$ die Bedingung dafür, dass

$$\mathcal{I}(\rho) = A\rho A^+ + A_c\rho A_c^+$$

Messoperation ist. $\mathcal{I}(|\Psi'><\Psi'|)$ ist ein Gemisch der reinen Zustände

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}(A \otimes \mathbf{1})\Psi' &= r_0|00> - r_1(\cos\alpha|10> + \sin\alpha|11>), \\
\sqrt{2}(A_c \otimes \mathbf{1})\Psi' &= r_1|00> - r_0(\cos\alpha|10> + \sin\alpha|11>),
\end{aligned}$$

jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/2$. Der Dichteoperator des ersten Zustanndes ist

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= (r_0|00> - r_2\cos\alpha|10> - r_1\sin\alpha|11>) \\
&\qquad\qquad (r_0 <00| - r_1\cos\alpha <10| - r_1\sin\alpha <11|) \\
&= r_0^2|00><00| - r_0r_1\cos\alpha|00><10| - r_0r_1\sin\alpha|00><11| \\
&\quad -r_0r_1\cos\alpha|10><00| + r_2^2\cos^2\alpha|10><10| + r_2^2\cos\alpha\sin\alpha|10><11| \\
&\quad -r_0r_1\sin\alpha|11><00| + r_2^2\sin\alpha\cos\alpha|11><10| + r_2^2\sin^2\alpha|11><11|,
\end{aligned}$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_B\rho_0 &= r_0^2|0><0| - r_0r_1\cos\alpha|0><1| - r_0r_1\cos\alpha|1><0| \\
&\quad +r_2^2\cos^2\alpha|1><1| + r_2^2\sin^2\alpha|1><1| \\
&= r_0^2|0><0| - r_0r_1\cos\alpha|0><1| \\
&\quad -r_0r_1\cos\alpha|1><0| + r_2^2\alpha|1><1|.
\end{aligned}$$

Im Dichteoperator ρ_1 des zweiten Zustandes, $\sqrt{2}(A_c\otimes\mathbf{1})\Psi'$, sind lediglich r_o und r_1 vertauscht, so dass sich die Eigenwerte der partiellen Spuren über $\mathcal{H}_B$ aus derselben charakteristischen Gleichung ergeben:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} r_0^2 - x & -r_0r_1\cos\alpha \\ -r_0r_1\cos\alpha & r_1^2 - x \end{vmatrix} &= r_0^2r_1^2 - (r_0^2 + r_1^2)x + x^2 - r_0r_1\cos^2\alpha \\
&= x^2 - x + r_0^2r_1^2\sin^2\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Mit

$$4r_0^2r_1^2 = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}}\right) = \frac{Q^2}{4}$$

ergeben sich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung zu

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha}\right), \qquad x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha}\right).$$

Wegen $d_0^2 + d_1^2 = 1$ gilt $\{x_0, x_1\} = \{d_0^2, d_1^2\}$ genau dann, wenn

$$\sqrt{1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha} = d_0^2 - d_1^2, \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{Q^2}{4}\sin^2\alpha = (d_0^2 - d_1^2)^2$$

ist, also

$$\frac{Q^2}{4} = \frac{1-(d_0^2-d_1^2)^2}{\sin^2\alpha} = \frac{1-(d_0^4+d_1^4)+2d_0^2d_1^2}{4c_0^2c_1^2} = \frac{d_0^2d_1^2}{c_0^2c_1^2}.$$

Die letzte Gleichheit der Kette ergibt sich aus $(d_0^2+d_1^2)^2 = 1$. Es bleibt zu zeigen, dass $Q^2/4 \leq 1$ ist. $\{c_0^2, c_1^2\} \prec \{d_0^2, d_1^2\}$ ist äquivalent zu $d_0^2 - d_1^2 \leq c_0^2 - c_1^2$. Da auch $(c_0^2+c_1^2)^2 = 1$ ist, folgt aus $(d_0^2-d_1^2)^2 \leq (c_0^2-c_1^2)^2$, dass $1-4d_0^2d_1^2 \leq 1-4c_0^2c_1^2$ und damit $d_0^2d_1^2 \leq c_0^2c_1^2$. Damit ist die Hinlänglichkeit für $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbf{C}^2$ gezeigt.

(Fortsetzung folgt)