Zusammenfassung der 24. Vorlesung (13.06.08)

1.4.8 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

1.4.8.2 *Das Nielsenrsche Theorem (Fortsetzung)*:

In der 23. Vorlesung hatten wir zuletzt gezeigt, dass im $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ die Bedingung $\{c_0^2, c_1^2\} \prec \{d_0^2, d_1^2\}$ hinreicht, um eine lokale Messoperation $\mathcal{I}$ zu konstruieren, die den Zustand $\Psi = c_0|00> + c_1|11>$ in ein Gemisch zweier reiner Zutände mit den Schmidtkoeffizienten d_0, d_1 zu überführen, die je mit der Wahrscheilichkeit $1/2$ auftreten. Die Schmidtzerlegungen dieser Zustände hatten wir nicht explizit ausgerechnet. Durch klassische Kommunikation können wir in Abhängigkeit vom Messergebnis durch lokale unitäre Operationen $U \otimes V$ bzw. $U_c \otimes V_c$ immer erreichen, dass

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}(U \otimes V)(A \otimes \mathbf{1})\Psi' &= d_0|00> + d_1|11> =: \Phi \\
\sqrt{2}(U_c \otimes V_c)(A_c \otimes \mathbf{1})\Psi' &= d_0|00> + d_1|11> = \Phi
\end{aligned}$$

ist, so dass, wenn man die lokale unitäre Operation $\Psi \mapsto \Psi'$ mit einbezieht, eine LOCC Operation $\mathcal{J}$ existiert für die

$$\mathcal{J}(|\Psi >< \Psi|) = \frac{1}{2}|\Phi >< \Phi| + \frac{1}{2}|\Phi >< \Phi| = |\Phi >< \Phi|$$

gilt.

Im allgemeinen Fall $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ergibt sich die Hinlänglichkeit von $\{c_k^2\} \prec \{d_l^2\}$ auf folgende Weise. Man betrachtet für $0 \leq t \leq 1$ die speziellen doppelt stochastischen Matrizen der Gestalt

$$(((T_{(m,n)})_{kj})) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots} & 0 \\
0 & \multicolumn{2}{l}{\cdots \ 0 \quad t \quad 0 \ \cdots \ 0 \ (1-t) \ 0 \ \cdots \ \cdots} & 0 \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots\cdots\cdots} & 0 \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & \multicolumn{2}{l}{\cdots \ 0 \ (1-t) \ 0 \ \cdots \ 0 \quad t \quad 0 \ \cdots\cdots} & 0 \\
0 & \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots\cdots} & 0 \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad 0} & 1
\end{pmatrix},$$

die auch T-Matrizen genannt werden. Für diese ist also

$$T_{(m,n)} \begin{pmatrix} x_0 \\ . \\ . \\ x_{m-1} \\ x_m \\ x_{m+1} \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_n+1 \\ , \\ . \\ x_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ . \\ . \\ x_{m-1} \\ tx_m+(t-1)x_n \\ x_{m+1} \\ . \\ . \\ x_{n-1} \\ (t-1)x_m+tx_n \\ x_n+1 \\ , \\ . \\ x_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun der folgende Satz:

Satz: *Jede doppwlt stochastische Matrix ist ein Produkt endlich vieler T-Matrizen.*

Für $\{c_k^2\} \prec \{d_l^2\}$ sei $c_k^2 = \sum_j D_{kj} d_j^2$, wobei D doppelt stochastisch ist, und $D = T_0 T_1 \dots T_M$. Sei $T_0 = T_{(m,n)}$ und $c_k^2 = \sum_j (T_0)_{kj} f_j^2$, $\sum_j f_j^2 = 1$. Dann gilt nicht nur $\{c_k^2\} \prec \{f_l^2\}$, sondern wegen

$$\begin{pmatrix} c_m^2 \\ c_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & (1-t) \\ (1-t) & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_m^2 \\ f_n^2 \end{pmatrix},$$

oder wegen $\gamma^2 := c_m^2 + c_m^2 = f_m^2 + f_m^2$ mit

$$\begin{pmatrix} \delta_m^2 \\ \delta_n^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} c_m^2 \\ c_n^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_m^2 \\ \lambda_n^2 \end{pmatrix} := \frac{1}{\gamma^2} \begin{pmatrix} f_m^2 \\ f_n^2 \end{pmatrix}$$

auch

$$\begin{pmatrix} \delta_m^2 \\ \delta_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & (1-t) \\ (1-t) & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_m^2 \\ \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Wie wir eingangs gezeigt haben, ist dies aber die hinlängliche Bedingung für die Existenz einer LOCC Messoperation in $\mathbf{C^2} \otimes \mathbf{C}^2$, die einen gegebenen Zustand mit den Schmidtkoeffizienten δ_0, δ_1 in einen Zustand mit den Schmidtkoeffizienten λ_0, λ_1 umwandelt. Es genügt nun, für $\Psi = \sum_0^{N-1} \varphi_k \otimes \psi_k$ den

Teilraum

$$\mathcal{H}_{(m,n)} := \mathrm{span}\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i,j=m,n} \cong \mathbf{C^2} \otimes \mathbf{C}^2$$

und die direkte Zerlegung

$$\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{(m,n)} \oplus (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \ominus \mathcal{H}_{(m,n)})$$

zu betrachten. Die für $\mathcal{H}_{(m,n)}$ existierende LOCC Messoperation, die den Zustand

$$\tilde{\Psi}_{(m,n)} = \delta_m \varphi_m \otimes \psi_m + \delta_n \varphi_n \otimes \psi_n$$

in

$$\tilde{\Phi}_{(m,n)} = \lambda_m \varphi_m \otimes \psi_m + \lambda_n \varphi_n \otimes \psi_n$$

umwandelt, also

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(\tilde{A} \otimes \tilde{V})\tilde{\Psi}_{(m,n)} &= \lambda_m \varphi_m \otimes \psi_m + \lambda_n \varphi_n \otimes \psi_n = \tilde{\Phi}_{(m,n)} \\ \sqrt{2}(\tilde{A}_c \otimes \tilde{V}_c)\tilde{\Psi}_{(m,n)} &= \lambda_m \varphi_m \otimes \psi_m + \lambda_n \varphi_n \otimes \psi_n = \tilde{\Phi}_{(m,n)}, \end{aligned}$$

wird auf $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}((\tilde{A} \otimes \tilde{V}) \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1})\Psi = \sqrt{2}((\tilde{A}_c \otimes \tilde{V}_c) \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1})\Psi \\ &= \gamma^2(\lambda_m \varphi_m \otimes \psi_m + \lambda_n \varphi_n \otimes \psi_n) + \sum_{k \neq m,n} c_k \varphi_k \otimes \psi_k = \tilde{\Phi} \end{aligned}$$

fortgesetzt, denn

$$\begin{aligned} & ((\tilde{A}^+ \otimes \tilde{V}^+) \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1})((\tilde{A} \otimes \tilde{V}) \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}) \\ + \quad & ((\tilde{A}_c^+ \otimes \tilde{V}_c^+) \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1})((\tilde{A}_c \otimes \tilde{V}_c) \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}) \\ = \quad & (((\tilde{A}^+\tilde{A} + \tilde{A}_c^+\tilde{A}_c) \otimes \mathbf{1}) \oplus \mathbf{1}) = ((\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \oplus \mathbf{1}) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Für die zugehörige Operation

$$\mathcal{J}_0(|\Psi >< \Psi|) = |\tilde{\Phi} >< \tilde{\Phi}| \qquad \text{gilt} \qquad c_k^2 = \sum_j (T_0)_{kj} f_j^2,$$

wobei f_j die oben schon betrachteten Schmidtkoeffizienten von $\tilde{\Phi}$ sind, die für $j \neq m, n$ mit denen von Ψ übereinstimmen. Man kann dieses Verfahren nun analog fortsetzen, indem man in Bezug auf T_1 eine Operation $\mathcal{J}_1$

$$\mathcal{J}_1(|\tilde{\Phi} >< \tilde{\Phi}|) = |\tilde{\tilde{\Phi}} >< \tilde{\tilde{\Phi}}| \qquad \text{mit} \qquad f_k^2 = \sum_j (T_0)_{kj} g_j^2,$$

wobei g_j die Schmidtkoeffizienten von $\tilde{\tilde{\Phi}}$ sind. Nach $M+1$ Schritten erhält man so den Zustand

$$\hat{\Phi} = \sum_k d_k \varphi_k \otimes \psi_k \qquad \text{mit} \qquad c_k = \sum_j D_{kj} d_j = \sum_j (\prod_0^M T_l)_{kj} d_j.$$

Nun braucht man nur noch eine lokale unitäre Operation $W_A \otimes W_B$ in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit $\chi_k = W_A \varphi_k$ und $\eta_k = W_B \psi_k$ durchzufüren, um den gefragten Zustand Φ zu präpariesen.

Damit ist das Nielsensche Theorem bewiesen.

Wir hatten schon an früherer Stelle bemerkt, dass zwei reine bipartite Zustände Ψ und Φ ind $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ genau dann die gleichen Schmidtkoeffizienten haben, wenn es unitäre Transformationen U auf $\mathcal{H}_A$ und V auf $\mathcal{H}_B$ gibt, so dass $(U \otimes V)\Psi = \Phi$ ist. Die Menge der reinen bipartiten Zustände auf $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ist damit zerlegt und ist die Vereinigung der disjunkten Klassen $[\Psi]$ von Zuständen mit den gleichen Schmidtkoeffizienten. Schreibt man $\Psi \geq_{LOCC} \Phi$ genau dann, wenn Φ mit einer LOCC Messoperation aus Ψ gewonnen werden kann, dann ist dies nach dem Nielsenschen Satz offenbar eine Klassenrelation, d.h. $[\Psi] \sqsupseteq_{LOCC} [\Phi] \Leftrightarrow \Psi \geq_{LOCC} \Phi$, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch, d.h. $([\Psi] \sqsupseteq_{LOCC} [\Phi] \wedge [\Psi] \sqsubseteq_{LOCC} [\Phi]) \Rightarrow [\Psi] = [\Phi]$, ist. Damit ist alo eine Teilordnung auf den Klassen $[\Psi]$ von Zuständen mit gleichen Schmidtkoeffizienten definiert.

Satz: Sei etwa $d = \dim \mathcal{H}_A \leq \dim \mathcal{H}_B$, dann gilt, wenn $\{\varphi_k\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_A$ und $\{\psi_k\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}_B$, sowie $\varphi \in \mathcal{H}_A$ und $\psi \in \mathcal{H}_B$, dann ist in Bezug auf "$\sqsupseteq_{LOCC}$"

$$\left[\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d} \varphi_k \otimes \psi_k\right] \quad \text{maximales Element,} \qquad [\varphi \otimes \psi] \quad \text{minimales Element}$$

.

Beweis: Für beliebige c_k mit $\sum_{k=0}^{d-1} c_k^2 = 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} \\ \vdots \\ \frac{1}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \cdots & \frac{1}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^2 \\ c_1^2 \\ c_2^2 \\ \vdots \\ c_{d-1}^2 \end{pmatrix},$$

und damit $\{\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\} \prec \{c_0^2, c_1^2, c_2^2. \ldots, c_{d-1}^2\}$. Trivialer Weise gilt $\{c_0^2, c_1^2, c_2^2. \ldots, c_{d-1}^2\} \prec \{1, 0, 0, \ldots, 0\}$.

Wir hatten früher die maximale Verschränktheit bipartiter reiner Zustände für den Fall $d = \dim \mathcal{H}_A \leq \dim \mathcal{H}_B$ damit charakterisiert, dass die Elemente eines jeden maximalen Booleschen Unterverbandes von Teilräumen von $\mathcal{H}_A$ mit Elementen eines entsprechenden Booleschen Unterverbandes von Teilräumen von $\mathcal{H}_B$ strikt korreliert sind. Das Nielsensche Theorem liefert eine dazu alternative Charakterisierung, die LOCC Operationen zugrunde legt. Analoges gilt für die faktorisierenden Zustände. Erwünscht ist eine vollständige Ordnung der Klassen $[\Psi]$. Dann könnte jede isotone positive Funktion auf den Klassen (*entanglement monmotone*) als Maß für den Verschränktheitsgrad dienen. Dieses Ziel wird aber hier nur für bipartite reine Zustände für $d = 2$ erreicht, für die $\{c_0^2, c_1^2\} \prec \{d_0^2, d_1^2\}$ äquivalent zu $c_0^2 \leq d_0^2$ ist, so dass "$\prec$" eine vollständige Ordnung "$\sqsupseteq_{LOCC}$" der Klassen liefert. Für $d > 2$ ist die durch "$\sqsupseteq_{LOCC}$" gegebne Ordnung nicht vollständig. Eine vollständige Ordnung wird jedoch erreicht, wenn man eine aymptotische Umwandelbarkeit einführt, was in der nächsten Vorlesung geschehen soll.