Zusammenfassung der 25. Vorlesung (20.06.08)

1.4.8 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

1.4.8.2 *Das Nielsensche Theorem (Fortsetzung)*:

Satz: Seien $\Psi; \Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit Schmidtkoeffizienten $c_i, d_{(1)\,i}, d_{(2)\,i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, d-1$, wobei $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$. Genau dann gilt $|\Psi >< \Psi| \geq_{LOCC} p|\Psi_1 >< \Phi_1| + (1-p)|\Phi_2 >< \Phi_2|$, $0 \leq p \leq 1$, wenn mit $0 \leq p \leq 1$ die Relation $\{c_i^2\} \prec \{pd_{(1)\,i}^2 + (1-p)d_{(2)\,i}^2\}$ erfüllt ist.

Beweis: $\Rightarrow$: Da sowohl Φ_1 als auch Φ_2 durch eine LOCC Opreration gewonnen werden kann, gelten $\{c_i^2\} \prec \{d_{(1)\,i}^2\}$, $\{c_i^2\} \prec \{d_{(2)\,i}^2\}$ und mithin $\{c_i^2\} \prec \{pd_{(1)\,i} + (1-p)d_{(2)\,i}^2\}$. $\Leftarrow$: Sei $\Psi = \sum_i c_i \varphi_i \otimes \psi_i$ und $\tilde{\Phi} = \sum_i (pd_{(1)\,i} + (1-p)d_{(2)\,i})\varphi_i \otimes \psi_i$, dann gilt nach Voraussetzung $\Psi \geq_{LOCC} \tilde{\Phi}$. Mit $d_i^2 = pd_{(1)\,i}^2 + (1-p)d_{(2)\,i}^2$ gilt für

$$B = \sqrt{p} \sum_i \frac{d_{(1)\,i}}{d_i} |\psi_i >< \psi_i| \quad \text{und} \quad B_c = \sqrt{1-p} \sum_i \frac{d_{(2)\,i}}{d_i} |\psi_i >< \psi_i|$$

$B^+ B + B_c^+ B_c = \mathbf{1}$, sowie

$$(\mathbf{1} \otimes B)\tilde{\Phi} = \sqrt{p} \sum_i d_{(1)\,i} \varphi_i \otimes \psi_i \quad \text{und} \quad (\mathbf{1} \otimes B_c)\tilde{\Phi} = \sqrt{1-p} \sum_i d_{(2)\,i} \varphi_i \otimes \psi_i.$$

Damit lässt sich aus Ψ durch eine LOCC Messoperation $p\tilde{\Phi}_1 + (1-p)\tilde{\Phi}_2$ mit $\tilde{\Phi}_k = \sum_i d_{(k)\,i} \varphi_i \otimes \psi_i$, $k = 1, 2$, gewinnen. Sind $\Phi_k = \sum_i d_{(k)\,i} \chi_{(k)\,i} \otimes \eta_{(k)\,i}$ vorgegeben, dann braucht man mit geeigneten unitären Transformationen U, U_c auf $\mathcal{H}_A$ und V, V_c auf $\mathcal{H}_B$ nur $(\mathbf{1} \otimes B)$ durch $(U \otimes V)(\mathbf{1} \otimes B)$ und $(\mathbf{1} \otimes B_c)$ durch $(U_c \otimes V_c)(\mathbf{1} \otimes B_c)$ zu ersetzen, um $\Psi \geq_{LOCC} \tilde{\Phi} \geq_{LOCC} p\Phi_1 + (1-p)\Phi_2$ zu erhalten.

Durch schrittweises Anwenden des Beweisverfahrens erschließt man das folgende Korollar:

Korollar: $|\Psi >< \Psi| \geq_{LOCC} \sum_k p_k |\Phi_k >< \Phi_k|$, wobei $p_k \geq 0$, $\sum_k P_k = 1$ ist, gilt genau dann, wenn $\{c_i^2\} \prec \{\sum_k p_k d_{(k)\,i}^2\}$.

Hieraus kann mann man Aussagen über die LOCC Umwandelbarkeit von gemischten Zuständen erschließen, die jedoch keine vollständige Ordnung der

Klassen lokal unitär äquivalenten Dichteoperatoren liefern. Hierzu bedarf es der asymptotischen Umwandelbarkeit.

1.4.8.3 *Asymptotische Umwandelbarkeit*

Für $\Psi, \Phi \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ hatten wir bisher die Relation

$$\Psi \geq_{LOCC} \Phi \;:\Leftrightarrow\; \exists A \otimes U, A^+A \leq \mathbf{1}, U^+U = \mathbf{1}, \Phi = \frac{1}{\|(A \otimes U)\Psi\|}(A \otimes U)\Psi$$

betrachtet, wobei $p = \|(A \otimes U)\Psi\|^2$ die Wahrscheeinlichkeit für die Umwandlung in Φ bei der entsprechenden LOCC Messoperation ist. Die Negation dieser Relation ist

$$\Psi \ngeq_{LOCC} \Phi \;:\Leftrightarrow\; \forall A \otimes U, A^+A \leq \mathbf{1}, U^+U = \mathbf{1}, \Phi \neq \frac{1}{\|(A \otimes U)\Psi\|}(A \otimes U)\Psi.$$

Die **asymptotidche Umwandelbarkeit** wird nun auf folgende Weise definiert

$$\begin{aligned} \Psi \succeq_{LOCC} \Phi \quad :\Leftrightarrow \qquad \exists \quad & \{A_n \otimes U_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n} \cong (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n}, \\ & A_n^+ A_n \leq \mathbf{1}, U_n^+ U_n = \mathbf{1},\ \{m_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subseteq \mathbf{N}, \\ & \Lambda_n \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes (n - m_n)} \end{aligned}$$

so dass bei Identifikation äquivalenter Objekte hinsichtlich der Isomorphie $\mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n} \cong (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n}$ für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|(A_n \otimes U_n)\Psi^{\otimes n}\|} | < \Phi^{\otimes m_n} \otimes \Lambda_n, (A_n \otimes U_n)\Psi^{\otimes n} > | \;\to 1, \\ & \|(A_n \otimes U_n)\Psi^{\otimes n}\| \;\to\; 1, \quad \frac{m_n}{n} \;\to\; 1 \end{aligned}$$

konvergieren.

Mit anderen Worten: Alice und Bob operieren lokal und mit klassischer Kommunikation auf einem bipartiten System, das aus einer asymptotisch großen Anzahl von Teilchenpaaren besteht, von denen sich die ersten, in $\mathcal{H}_A$ bechriebenen, bei Alice, und die zweiten, in $\mathcal{H}_B$ beschiebenen, bei Bob befinden. Alice operiert auf $\mathcal{H}_A^{\otimes n}$ und Bob auf $\mathcal{H}_B^{\otimes n}$. Der Ausgangszustand ist $\Psi^{\otimes n} \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n}$ und bei saymptotischer Umwandelbarkeit ist bei asymptotisch großen n das Resultat der Operation $\Phi^{\otimes n} \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n}$.

Satz: Sei $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$, $m \leq d^n$, und

$$\Psi_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i \otimes \psi_i \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n},$$

wobei $\{\varphi_i\}$ ein Orthonoralsystem in $\mathcal{H}_A^{\otimes n}$ und $\{\psi_i\}$ ein Orthonoralsystem in $\mathcal{H}_B^{\otimes n}$ ist. (Beachte die Identifikation äquivalenter Objekte in $\mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n} \cong (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n}$.) Dann gilt für jeden maximal verschränkten Zustand $\Phi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, dass Ψ_m in $\Phi^{\otimes \log_d m}$ asymptotisch umgewandelt werden kann, d.h. $\Psi_m \succeq_{LOCC} \Phi^{\otimes \log_d m}$.

Beweis: Für $L \in \mathbf{N}$ interpretiere

$$\Psi_m^L = \frac{1}{\sqrt{m^L}} \sum_{\nu=0}^{m^L-1} \Sigma_\nu \otimes \Omega_\nu \ \in \ \mathcal{H}_A^{\otimes nL} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes nL} \cong (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes nL}$$

in $\mathcal{H}_A^{\otimes nL} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes nL}$ mit m-adischer Zählung, d.h.

$$\begin{aligned}
\Sigma_\nu &= \varphi_{k_1} \otimes \varphi_{k_2} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_L}, \quad \nu = k_1 m^{L-1} + k_2 m^{L-2} + k_3 m^{L-3} + \cdots + k_L m^0 \\
\Omega_\nu &= \psi_{k_1} \otimes \psi_{k_2} \otimes \cdots \otimes \psi_{k_L}, \quad \nu = k_1 m^{L-1} + k_2 m^{L-2} + k_3 m^{L-3} + \cdots + k_L m^0.
\end{aligned}$$

Da jede Kombination $(k_1, k_2, \ldots, k_L)$ nur einmal vorkommt, sind $\{\Sigma_\nu\}$ und $\{\Omega_\nu\}$ Orthonormalsysteme, so dass $(1/\sqrt{m^L})$ die Schmidtkoeffizienten von Ψ_m^L sind. In $\mathcal{H}_A^{\otimes nL}$ gilt für $l \in \mathbf{N}$, $l \leq L$

$$\sum_{\nu=0}^{d^l-1} |\Sigma_\nu >< \Sigma_\nu| + \sum_{\nu=d^l}^{d^{nL}-1} |\Sigma_\nu >< \Sigma_\nu| = \mathbf{1},$$

so dass durch die entsprechende LOCC Operation mit der Wahrscheinlichkeit $p = \|(\sum_{\nu=0}^{d^l-1} |\Sigma_\nu >< \Sigma_\nu| \otimes \mathbf{1})\Psi_m^L\|^2 = (d^l/m^L)$ der Zustand

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{p}}(\sum_{\nu=0}^{d^l-1} |\Sigma_\nu >< \Sigma_\nu| \otimes \mathbf{1})\Psi_m^L &= \frac{1}{\sqrt{d^l}} \sum_{\nu=0}^{d^l-1} \Sigma_\nu \otimes \Omega_\nu \\
&\in \mathcal{H}_A^{\otimes nL} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes nL} \cong (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes nL}
\end{aligned}$$

präpariert werden kann. Für jeden maximal verschränkten Zustand Φ in $(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ gilt

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{k=0}^{d-1} \chi_k \otimes \eta_k,$$

und damit

$$\Phi^{\otimes l} \otimes (\chi_0 \otimes \eta_0)^{\otimes(nL-l)} = \frac{1}{\sqrt{d^l}} \sum_{\mu=0}^{d^l-1} \tilde{\Sigma}_\mu \otimes \tilde{\Omega}_\mu \otimes (\chi_0 \otimes \eta_0)^{\otimes(nL-l)}.$$

Da $\{\tilde{\Sigma}_{mu}\}$ und $\{\tilde{\Omega}_{mu}\}$ wiederum Orthonormalsysteme sind, stimmen in $\mathcal{H}_A^{\otimes nL} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes nL}$ die Schmidtkoeffizienten von $\frac{1}{\sqrt{p}}(\sum_{\nu=0}^{d^l-1} |\Sigma_\nu >< \Sigma_\nu| \otimes \mathbf{1})\Psi_m^L$ und $\Phi_\kappa^{\otimes l} \otimes (\chi_0 \otimes \eta_0)^{\otimes(nL-l)}$ überein, und durch eine lokale unitäre Transformation $(U \otimes V)$ kann man die LOCC Operation so modifizieren, dass

$$\frac{1}{\sqrt{p}}(U \otimes V)(\sum_{\nu=0}^{d^l-1} |\Sigma_\nu >< \Sigma_\nu| \otimes \mathbf{1})\Psi_m^L = \Phi^{\otimes l} \otimes (\chi_0 \otimes \eta_0)^{\otimes(nL-l)},$$

wobei nach wie vor $p = (d^l/m^L)$ ist. Nun gilt

$$\forall d, m \in \mathbf{N} \quad \forall \epsilon \geq 0 \quad \exists l, L \in \mathbf{N} \quad d^l \leq m^L \leq d^l(1+\epsilon).$$

Die Ungleichung ist äquivalent zu $l \log d \leq L \log m \leq l \log d + \log(1+\epsilon)$, also ist die Aussage äquivalent zu

$$\forall d, m \in \mathbf{N} \quad \forall \epsilon' \geq 0 \quad \exists l, L \in \mathbf{N} \quad l \log d \leq L \log m \leq l \log d + \epsilon'.$$

Dieses ist aber trivial, denn $0 \leq (\log m / \log d) - (l/L) \leq \frac{1}{L \log d}\epsilon' := \epsilon''$ folgt daraus, dass die rationalen Zahlen eine dichte Menge in den rellen bilden. Für $\epsilon \to 0$ erhält man nicht nur $p = (d^l/m^L) \to 1$, sondern auch $l \to L \log_d m$. Für $\epsilon \to 0$ gilt also auch, dass

$$\frac{1}{\sqrt{p}}| < (\Phi^{\otimes \log_d m})^{\otimes L} \otimes (\chi_0 \otimes \eta_0)^{\otimes(nL-l)}, (U \otimes V)(\sum_{\nu=0}^{d^l-1} |\Sigma_\nu >< \Sigma_\nu| \otimes \mathbf{1})\Psi_m^L > |$$

gegen 1 konvergiert, d.h. $\Psi_m \succeq_{LOCC} \Phi^{\otimes \log_d m}$.

Satz: Sei $d = \min\{\dim \mathcal{H}_A, \dim \mathcal{H}_B\}$, $m \leq d^n$, und

$$\Psi = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \varphi_i \otimes \psi_i \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

die Schmidtdarstellung von Ψ. Dann gilt

$$|\Psi >< \Psi| \succeq_{LOCC} p|\Phi >< \Phi| + (1-p)|\varphi_0 \otimes \psi_0 >< \varphi_0 \otimes \psi_0|, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

wobei $\Phi = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} \varphi_i \otimes \psi_i$, also maximal verschränkt ist, und $p = \frac{E(\Psi)}{\log_2 d}$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\Psi^{\otimes n} &= \sum_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=0}^{d-1} c_{k_0}c_{k_1}c_{k_2}\cdots_{k_{n-1}} \bigotimes_{i=o}^{n-1} \varphi_{k_i} \otimes \psi_{k_i} \\ &\in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n} \cong \mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n}\end{aligned}$$

und bei Interpretation in $\mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n}$ ist dieser Zustand

$$\Psi^{\otimes n} = \sum_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=0}^{d-1} c_{k_0}c_{k_1}c_{k_2}\cdots_{k_{n-1}} \Sigma_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}} \otimes \Omega_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}},$$

wobei $\{\Sigma_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}_A^{\otimes n}$ und $\{\Omega_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}\}$ ein solches in $\mathcal{H}_B^{\otimes n}$ ist, denn jede Kombination $(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ kommt nur einmal vor. Mit

$$\mathcal{M}(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1}) := \{(k_0, k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) | s_l = \#\{j | k_j = l\}\},$$

wobei stets $\sum_{l=0}^{d-1} s_l = n$ gilt, sei

$$P(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1}) = \sum_{\mathcal{M}(s_0,s_1,s_2,\ldots,s_{d-1})} |\Sigma_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}} >< \Sigma_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}|.$$

Die $P(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1})$ bilden eine rojektionswertige Zerlegung der Eins in $\mathcal{H}_A^{\otimes n}$,

$$\sum_{(s_0,s_1,s_2,\ldots,s_{d-1})} P(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1}) = \mathbf{1},$$

und die lokale Operation

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}(|\Psi^{\otimes n} >< \Psi^{\otimes n}|) = \sum_{(s_0,s_1,s_2,\ldots,s_{d-1})} \\ &(P(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1}) \otimes \mathbf{1})|\Psi^{\otimes n} >< \Psi^{\otimes n}|(P(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1}) \otimes \mathbf{1})\end{aligned}$$

auf $\mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n}$ liefert ohne Selektion ein Gemisch aus den Zuständen

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{p(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1})}}(P(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1}) \otimes \mathbf{1})|\Psi^{\otimes n} > \\ = \quad &\frac{1}{\sqrt{\binom{n!}{s_0!s_1!\ldots s_{d-1}!}}} \sum_{\mathcal{M}(s_0,s_1,s_2,\ldots,s_{d-1})} \Sigma_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}} \otimes \Omega_{k_0,k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}\end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeiten $p(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{d-1}) = \binom{n!}{s_0!s_1!\ldots s_{d-1}!} \prod_{l=0}^{d-1} c_l^{s_l}$.

(Fortsetzung folgt)