Zusammenfassung der 26. Vorlesung (27.06.08) und eines Teils der 27. Vorlesung (04.07.08)

1.4.8 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

1.4.8.2 *Das Nielsensche Theorem (Fortsetzung)*:

(Fortsetzung des Beweises)

Die in Abhängigkeit vom Messergebnis $(s_0, s_1, s_2, \ldots, ss_{d^2})$ bei der zuletzt betrachteten *LOCC* Operation erhaltenen reinen Zustände haben die Form

$$\Psi_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i \otimes \psi_i \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n}, \quad m = \binom{n!}{s_0! s_1! \ldots s_{d-1}!} \leq d^n,$$

über die der vorstehend bewiesene Satz eine Aussage macht. In den Fällen $(s_0, s_1, s_2, \ldots, ss_{d^2})$ mit $s_l < n$ kann demnach für asymptotisch großes n durch eine geeignete nachgeschaltete asymptotische Umwandlung aus Ψ_m den Zustand $\Phi_n^{\otimes \log_{d^n} m}$ erhalten werden, wobei Φ_m ein in $\mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n}$ maximal verschränkter Zustand ist. Nun ist wegen $\mathcal{H}_A^{\otimes n} \otimes \mathcal{H}_B^{\otimes n} \cong (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)^{\otimes n}$ auch $\Phi_n \cong \Phi^{\otimes n}$, wobei Φ maximal verschränkt in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ist. Wegen $n \log_{d^n} m = \log_{d^n} m. \Rightarrow m^n = d^{n \log_{d^n} m^n} = d^{\log_d m^n} \Rightarrow n \log_{d^n} m^n = \log_d m^n = (\log_d m)n$, kann in diesen Fällen aus Ψ_m der Zustand $(\Phi^{\otimes n})^{\otimes \log_{d^n} m} \cong (\Phi^{\otimes \log_d m})^{\otimes n}$ erhalten werden. In den Fällen $\exists i\, s_i = n$ ist $\Phi_m = \varphi_i \otimes \varphi_i \otimes \cdots \otimes \varphi_i \otimes \psi_i \otimes \psi_i \otimes \cdots \otimes \psi_i \cong (\varphi_0 \otimes \psi_0)^{\otimes n}$ unverschränkt und, abhängig vom Messergebnis, kann durch eine nachgeschaltete *LOCC* Operation Ψ_m in $(\varphi_0 \otimes \psi_0)^{\otimes n}$ umgewandelt werden.- Wenn sich Alice und Bob also eine asymptotisch große Anzahl n von Teilchenpaaren im Zustand $\Psi = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \varphi_i \otimes \psi_i \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ teilen, können Sie durch *LOCC* Operationen erreichen, dass jedes dieser Teilchenpaare entweder im Zustand $\Phi = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} \varphi_i \otimes \psi_i \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ befindet, der maximal verschränkt ist, oder im Zustand $\varphi_0 \otimes \psi_0 \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, der unverschränkt ist. Ein willkürlich ausgewähltes Teilchenpaar ist also in einem dieser beiden Zustände. Mit anderen Worten, Alice und Bob teilen sich eine Gesamtheit von Teilchenpaaren im Zustand

$$\rho = p|\Phi >< \Phi| + (1-p)|\varphi_0 \otimes \psi_0 >< \varphi_0 \otimes \psi_0|, \quad 0 \leq p \leq 1.$$

Dabei ist p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein willkürlich ausgewähltes

Teilchenpaar im Zustand Φ ist. Offenbar ist

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1} = 0 \\ \sum s_i = n}}^{n-1} p(s_0, s_1, \ldots, s_{d-1}) \log_d \binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\substack{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1} = 0 \\ \sum s_i = n}}^{n-1} \prod_{l=0}^{d-1} c_l^{2s_l} \binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} \log_d \binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!}.
\end{aligned}$$

Da es genügt, p für asymptotisch große n auszuwerten, kann man die Stirlingsche Formel

$$\log_d n! \approx (n + \frac{1}{2}) \log_d n - \frac{n}{\ln d}$$

verwenden und erhält

$$\begin{aligned}
\log_d \binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} &\approx n \log_d n + \frac{1}{2} \log_d n - \frac{n}{\ln d} \\
&\quad - \sum_{l=0}^{d-1} (s_l \log_d s_l + \frac{1}{2} \log_d s_l - \frac{s_l}{\ln d}) \\
&= -\sum_{l=0}^{d-1} (s_l \log_d \frac{s_l}{n} + \frac{1}{2} \log_d \frac{s_l}{n}),
\end{aligned}$$

wobei $\sum s_l = n$ ausgenutzt wurde. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \log_d \binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} &\approx -\sum_{l=0}^{d-1} \frac{s_l}{n} \log_d \frac{s_l}{n} - \frac{1}{2n} \log_d (\frac{1}{n} \prod_{\substack{l = 0 \\ s_l \neq 0}}^{n-1} s_l) \\
&= -\sum_{l=0}^{d-1} \frac{s_l}{n} \log_d \frac{s_l}{n} + \frac{1}{2n} \log_d \frac{n}{\prod_{s_l \neq 0} s_l}.
\end{aligned}$$

Für $s_l < n$ ist

$$0 \leq \frac{1}{2n} \log_d \frac{n}{\prod_{s_l \neq 0} s_l} \leq \frac{1}{2n} \log_d n.$$

und nach der de l'Hospitalschen Regel ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} \log_d n = \frac{1}{2 \ln d} \frac{1}{n} = 0,$$

so dass für asymptotisch gro0e n

$$\frac{1}{n}\log_d\binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} = -\sum_{l=0}^{d-1}\frac{s_l}{n}\log_d\frac{s_l}{n}$$

ist. Mit

$$r_l := \sum_{l\neq k}\frac{s_l}{n} = 1-\frac{s_k}{n} \leq 1 \quad \text{gilt} \quad \log_d\frac{s_l}{n} = \frac{1}{\ln d}\ln(1-r_l) = \frac{1}{\ln d}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_l^\nu}{\nu}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\log_d\binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} &\approx -\sum_{l=0}^{d-1}(1-r_l)\log_d(1-r_l) \\
&= -\frac{1}{\ln d}\sum_{l=0}^{d-1}(1-r_l)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_l^\nu}{\nu} \\
&= -\frac{1}{\ln d}\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_l^\nu - r_l^{\nu-1}}{\nu}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$p = -\frac{1}{\ln d}\sum_{\substack{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1} = 0 \\ \sum s_i = n}}^{n-1}\prod_{l=0}^{d-1}c_l^{2s_l}\binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!}\sum_{l=0}^{d-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_l^\nu - r_l^{\nu-1}}{\nu}.$$

Die folgenden Identitäten erlauben es, p auf die behauptete Gestalt zu bringen: Zunächst ist

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1} = 0 \\ \sum s_i = n}}^{n-1}\prod_{l=0}^{d-1}c_l^{2s_l}\binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!}r_k \\
= &\sum_{\substack{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1} = 0 \\ \sum s_i = n}}^{n-1}\prod_{l=0}^{d-1}c_l^{2s_l}\binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!}\sum_{j\neq k}\frac{s_j}{n} \\
= &\sum_{j\neq k}\frac{s_j}{n}\sum_{\substack{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1} = 0 \\ \sum s_i = n}}^{n-1}\prod_{l=0}^{d-1}c_l^{2s_l}\binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\neq k} \frac{c_j^2}{n} \frac{\partial}{\partial(c_j^2)} \sum_{\substack{s_0,\, s_1, \ldots,\, s_{d-1}\,=\,0 \\ \sum s_i\,=\,n}}^{n-1} \prod_{l=0}^{d-1} c_l^{2s_l} \binom{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} \\
&= \sum_{j\neq k} \frac{c_j^2}{n} \frac{\partial}{\partial(c_j^2)} ((\sum_{i=0}^{d-1} c_i^2)^n - \sum_{i=0}^{d-1} (c_i^2)^n) = \sum_{j\neq k} c_j^2 (\sum_{i=0}^{d-1} c_i^2)^{n-1} - \sum_{j\neq k} (c_j^2)^n \\
&= \sum_{j\neq k} c_j^2 - \sum_{j\neq k} (c_j^2)^n
\end{aligned}
$$

und ferner

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\substack{s_0,\, s_1, \ldots,\, s_{d-1}\,=\,0 \\ \sum s_i\,=\,n}}^{n-1} \prod_{l=0}^{d-1} c_l^{2s_l} \binom{n!}{s_0!, s_1! \ldots, s_{d-1}!} r_k^2 \\
= & \sum_{\substack{s_0,\, s_1, \ldots,\, s_{d-1}\,=\,0 \\ \sum s_i\,=\,n}}^{n-1} \prod_{l=0}^{d-1} c_l^{2s_l} \binom{n!}{s_0!, s_1! \ldots, s_{d-1}!} \sum_{j\neq k} \sum_{j'\neq k} \frac{s_j}{n} \frac{s_{j'}}{n} \\
= & \sum_{j\neq k} \sum_{j'\neq k} \frac{c_j^2}{n} \frac{\partial}{\partial(c_j^2)} \frac{c_{j'}^2}{n} \frac{\partial}{\partial(c_{j'}^2)} \sum_{\substack{s_0,\, s_1, \ldots,\, s_{d-1}\,=\,0 \\ \sum s_i\,=\,n}}^{n-1} \prod_{l=0}^{d-1} c_l^{2s_l} \binom{n!}{s_0!, s_1! \ldots, s_{d-1}!} \\
= & \sum_{j\neq k} \sum_{j'\neq k} \frac{c_j^2}{n} \frac{\partial}{\partial(c_j^2)} \frac{c_{j'}^2}{n} \frac{\partial}{\partial(c_{j'}^2)} ((\sum_{i=0}^{d-1} c_i^2)^n - \sum_{i=0}^{d-1} (c_i^2)^n) \\
= & \sum_{j\neq k} \sum_{j'\neq k} \frac{c_j^2}{n} \frac{\partial}{\partial(c_j^2)} (c_{j'}^2 (\sum_{i=0}^{d-1} c_i^2)^{n-1} - (c_{j'}^2)^n) \\
= & \sum_{j\neq k} \sum_{j'\neq k} (\frac{1}{n} \delta_{jj'} c_j^2 (\sum_{i=0}^{d-1} c_i^2)^{n-1} + \frac{n-1}{n} c_j^2 c_{j'}^2 (\sum_{i=0}^{d-1} c_i^2)^{n-2} - \delta_{jj'} (c_j^2)^n) \\
= & (\frac{1}{n} \sum_{j\neq k} c_j^2 + \frac{n-1}{n} \sum_{j\neq k} \sum_{j'\neq k} c_j^2 c_{j'}^2 - \sum_{j\neq k} (c_j^2)^n) \\
= & (\sum_{j\neq k} c_j^2)^2 - \sum_{j\neq k} (c_j^2)^n + \frac{1}{n} (\sum_{j\neq k} c_j^2 - (\sum_{j\neq k} c_j^2)^2).
\end{aligned}
$$

Der letzte Term verschwindet für asymptotisch großes n. Man liest aus der vorstehenden Rechnung leicht ab, dass die Fortsetzung des Verfahrens, d.h.

r_k^ν, $\nu > 2$, für asymptotisch große n nur die beiden führenden Terme einen den Beitrag liefern, also für $n \to \infty$

$$\sum_{\substack{s_0, s_1, \ldots, s_{d-1} = 0 \\ \sum s_i = n}}^{n-1} \prod_{l=0}^{d-1} c_l^{2s_l} \left(\frac{n!}{s_0!, s_1!, \ldots, s_{d-1}!} \right) r_k^\nu \longrightarrow (\sum_{j \neq k} c_j^2)^\nu - \sum_{j \neq k} (c_j^2)^n,$$

gilt. Für die Wahrscheinlichkeit p dafür, ein maximal verschränktes Teilchenpaar auszuwählen, ergibt sich damit

$$\begin{aligned} p \quad &\longrightarrow \quad -\frac{1}{\ln d} \sum_{j=0}^{d-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\sum_{k \neq j} c_k^2)^{\nu+1} - (\sum_{k \neq j} c_k^2)^{\nu+}}{\nu} \\ &= \quad -\sum_{j=0}^{d-1} (1 - \sum_{k \neq j} c_k^2) \log_d (1 - \sum_{k \neq j} c_k^2) \\ &= \quad -\sum_{j=0}^{d-1} c_j^2 \log_d c_j^2 = -\frac{1}{\log_2 d} \sum_{j=0}^{d-1} c_j^2 \log_2 c_j^2 = \frac{E(\Psi)}{\log_2 d}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Bemerkung: Der Beweis der Umkehrung des letzten Satzes, d.h. der Möglichkeit, die Verschränktheit weniger Teilchenpaare auf eine größere Anzahl von Teilchenpaaren (asymptotisch) durch $LOCC$ Operationen zu verteilen, ist ebenfalls möglich. Jedoch hat diese Aussage ein andere Bedeutung. Hier wurde die Konzentration der Verschränktheit von vielen mäßig verschränkten Teilchenpaaren auf wenige maximal verschränkte Teilchenpaare durch $LOCC$ Operationen betrachtet. Man nennt solche Manipulationen auch **Destillation**. Die Beweisstruktur des letzten Satzes ist sogenannten Destillationsprotokollen entlehnt, die in dem Satz eine mathematisch genaue Formulierung gefunden haben. Der letzte Satz gibt auch einen Hinweis, wie man die Verschränktheit einer Anzahl von Teilschenpaaren bewerten kann. Die andere Richtung ist fürdie Verschränktheitsheorie von Bedeutung, denn sie verknüpft die Verschränktheit reiner Zustände mit der lokal asymptotischen Äquivalenz. Es gilt der Satz:

Satz: Hat $\Psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ die Verschränktheit $E(\Psi)$, ist $\Phi^+ \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ maximal verschränkt, und $\Xi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ unverschräkt, dann gilt

$$|\Psi >< \Psi| \succeq_{LOCC} \frac{E(\Psi)}{\log_2 d} |\Phi^+ >< \Phi^+| + (1 - \frac{E(\Psi)}{\log_2 d}) |\Xi >< \Xi|$$

und

$$\frac{E(\Psi)}{\log_2 d}|\Phi^+ >< \Phi^+| + (1 - \frac{E(\Psi)}{\log_2 d})|\Xi >< \Xi| \succeq_{LOCC} |\Psi >< \Psi|.$$

Beweis: S. z.B. in Guifré Vidal, *Entanglenebt monotones*, J. Mod. Opt. 47, 355 (2000).

Aus diesem Satz folgert man:

Satz: Ein Zustand $\Psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ist genau dann in einen Zustand $\Phi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ lokal asymptotisch umwandelbar, wenn $E(\Psi) \geq E(\Phi)$. Also

$$|\Psi >< \Psi| \succeq_{LOCC} |\Phi >< \Phi| \quad \Leftrightarrow \quad E(\Psi) \geq E(\Phi),$$

und insbesondere

$$|\Psi >< \Psi| \geq_{LOCC} |\Phi >< \Phi| \quad \Rightarrow \quad E(\Psi) \geq E(\Phi).$$

Beweis: Bei der Konstruktion der lokal symptotischen Umwandlung

$$|\Psi >< \Psi| \succeq_{LOCC} p|\Phi >< \Phi| + (1-p)|\varphi_0 \otimes \psi_0 >< \varphi_0 \otimes \psi_0|, \quad 0 \leq p \leq 1$$

war die Wahl des unverschränkten Zustands $\varphi_0 \otimes \psi_0$ willkürlich , ebensogut hääte man $\varphi_0 \otimes \psi_1 \perp \Phi$ wählen können. O.B.d.A. kann man also annehmen, dass im vorletzten Satz $\Xi \perp \Phi$ ist. In diesem Fall kann man aber auf dem Zustand $p|\Phi >< \Phi| + (1-p)|\Xi >< \Xi|$ so *LOCC* operieren, dass nur $|\Phi >< \Phi|$, nicht aber $|\Xi >< \Xi|$ umgewandelt wird. Mit $\{\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\} \prec \{1, 0, 0, \ldots, 0\}$ gilt $q \leq p$ genau dann, wenn $\{\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \ldots, \frac{1}{d}\} \prec \{\frac{q}{p}\frac{1}{d} + (1 - \frac{q}{p}), \frac{q}{p}\frac{1}{d}, \frac{q}{p}\frac{1}{d}, \ldots, \frac{q}{p}\frac{1}{d}\}$. Damit gilt nach einem früheren Satz

$$|\Phi >< \Phi| \geq_{LOCC} \frac{q}{p}|\Phi >< \Phi| + (1 - \frac{q}{p})|\Xi >< \Xi| \quad \Leftrightarrow \quad p \geq q,$$

und, wenn auf $p|\Phi >< \Phi| + (1-p)|\Xi >< \Xi|$ operiert wird,

$$\begin{aligned} & p|\Phi >< \Phi| + (1-p)|\Xi >< \Xi| \\ \geq_{LOCC} \quad & p\frac{q}{p}|\Phi >< \Phi| + p(1 - \frac{q}{p})|\Xi >< \Xi| + (1-p)|\Xi >< \Xi| \\ = \quad & q|\Phi >< \Phi| + (1-q)|\Xi >< \Xi| \quad \Leftrightarrow \quad p \geq q. \end{aligned}$$

Mit $p = (E(\Psi)/\log_2 d)$ und $q = (E(\Phi)/\log_2 d)$ folgt daher

$$|\Psi >< \Psi| \succeq_{LOCC} |\Phi >< \Phi| \quad \Leftrightarrow \quad E((\Psi) \geq E(\Phi),$$

denn die Relation "$\geq_{LOCC}$" impliziert natürlich die Relation "$\succeq_{LOCC}$". Dies beweist auch die besondere Behauptung des Satzes.

Eine weitere Konsequenz aus den vorstehenden Sätzen ist:

Satz: Ein Zustand $\Psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ist genau dann in einen gemischten Zustand $\sum_i p_i |\Phi_i >< \Phi_i|$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$ auf $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ lokal asymptotisch umwandelbar, wenn $E(\Psi) \geq E(\Phi)$ ist. Insbesondere gilt

$$|\Psi >< \Psi| \geq_{LOCC} \sum_i p_i |\Phi_i >< \Phi_i| \quad \Rightarrow \quad E(\Psi) \geq \sum_i p_i E(\Phi_i).$$

Beweis: S. Übungsaufgabe 27.