Schluss der Zusammenfassung der 27. Vorlesung (04.07.08) und Zusammenfassung der 28. Vorlesung (25.07.08), redigierte Fassung

1.4.8 *Lokale Messoperationen mit klassischer Kommunikation*:

1.4.8.2 *Das Nielsensche Theorem (Fortsetzung)*:

Eine weitere wichitige Folgerung ist, dass LOCC Operationen das Entanglement of Formation nur verkleinern können:

Satz: Sei ρ ein bipartiter Zustand und $\mathcal{J}$ eine LOCC Opera.tion. Dann gilt

$$E_F(\rho) \geq E_F(\mathcal{J}\rho).$$

Beweis: Sei $\rho = \sum_i p_i |\psi_i >< \psi_i|$ eine optimale Zerlegung und

$$\mathcal{J}(|\psi_i >< \psi_i|) = \sum_{k_i} q_{ik_i} |\varphi_{ik_i} >< \varphi_{ik_i}|.$$

Dann gilt wegen der Möglichkeit der Selektion nach k_i, dass

$$E(\psi_i) \geq \max_{k_i} E(\varphi_{ik_i}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} E_F(\rho) &= \sum_i p_i E(\psi_i) \geq \sum_i p_i \max_{k_i} E(\varphi_{ik_i}) \\ &= \sum_{i,k_i} p_i q_{ik_i} \max_{k_i} E(\varphi_{ik_i}) \geq \sum_{i,k_i} p_i q_{ik_i} E(\varphi_{ik_i}) \geq E_F(\mathcal{J}\rho). \end{aligned}$$

1.5 *Kriterien für die Unverschränktheit von Zusständen*:

Das v. Neumennsche Verschränktheitsmaß eines gemischten Zustands ρ ist als das Infimum der relativen Entropien $S(\rho \| \sigma)$ zu den unverschränkten Zuständen σ definiert. Man benötigt deshalb möglichst einfache Kriterien für die Unverschränktkeit von Zusänten.

Einen Ausgangspunkt für die Aufstellung solcher Kriterien stellt der Hahn-Banachsche Trennungssatz dar, der besagt, dass sich zwei disjunkte konvexe Punktmengen eins Vektorraumes $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{E} = \emptyset$ stets durch eine Hyperebene tzrennen lassen. Wir benötigen diesen sehr allgemein gültigen Satz nur für den $\mathbf{R}^n$: Es gibt eine Hyperebene $\{P | h \cdot \vec{OP} - \alpha = 0\}$ mit der Eigenschaft

$$P \in \mathcal{E} \Rightarrow h \cdot \vec{OP} - \alpha < 0, \qquad Q \in \mathcal{D} \Rightarrow 0 \leq h \cdot \vec{OQ} - \alpha.$$

Sei nun $\mathcal{D}$ die konvexe Menge der unverschränkten Zustände und $\mathcal{E} = \{\rho\}$. Wenn ρ versschränkt ist, dann gibt es einen selbstadjungierten Operator A mit der Eigenschaft

$$\mathrm{tr}(A\rho) - \alpha < 0, \qquad \sigma \in \mathcal{D} \Rightarrow 0 \leq \mathrm{tr}(A\sigma) - \alpha$$

bzw., mit $H = A - \alpha\mathbf{1}$, einen selbstadjungierten Operator H mit der Eigenschaft

$$\mathrm{tr}(H\rho) < 0, \qquad \sigma \in \mathcal{D} \Rightarrow 0 \leq \mathrm{tr}(H\sigma).$$

Betrachte nun den Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$. Ein unverschränkter Zustand hat die Form

$$\sigma = \sum_\nu p_\nu \rho_{\nu 1} \otimes \rho_{\nu 2} \otimes \cdots \otimes \rho_{\nu N} = \sum_\mu q_\mu Q_{\mu 1} \otimes Q_{\mu 2} \otimes \cdots \otimes Q_{\mu N},$$

wobei $Q_{\mu i}$ Orthogonalprojektoren suf $\mathcal{H}_i$ sind und $q_\mu \geq 0$. Deshalb enthält die Menge

$$\mathcal{S} := \{H = H^+ | \mathrm{tr}(H(Q_1 \otimes Q_2 \otimes \cdots \otimes Q_N)) \geq 0, Q_i = Q_i^+ = Q_i^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)\}$$

nur Operatoren, die für $\sigma \in \mathcal{D}$ die Ungleichung $\mathrm{tr}(H\sigma) \geq 0$ erfüllen.

$\mathcal{S}$ enthält aber auch alle Operatoren mit dieser Eigenschaft. Wenn $\mathrm{tr}(H\sigma) \geq 0$ für alle $\sigma \in \mathcal{D}$ gilt, dann gilt auch $\mathrm{tr}(H(|\varphi_1 >< \varphi_1| \otimes |\varphi_2 >< \varphi_2| \otimes \cdots \otimes |\varphi_N >< \varphi_N|)) \geq 0$ für beliebige $\varphi_i \in \mathcal{H}_i$, sowie alle Linearkombinationen der reinen faktorisierenden Zustände mit positiven Koeffizienten. Damit folgt $H \in \mathcal{S}$. Das lineare Funktional, das einen verschränkten Zustand ρ nach dem Trennungssatz von den unverschränkten Zuständen in $\mathcal{D}$ trennt, gehört also $\mathcal{S}$ an. Damit ist gezeigt:

Lemma(Horodecki): Fur multipartite Zustände σ gilt

$$\sigma \in \mathcal{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (H \in \mathcal{S})\, \mathrm{tr}(H\sigma) \geq 0.$$

Für bipartite Zustände lassen sich einfachere Kriterium herleiten. Dazu betrachte man für $\dim \mathcal{H}_1 \leq \dim \mathcal{H}_2 < \infty$ den Kegel

$$\mathcal{C} := \{\Lambda | \Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), \text{ linear und positiv}\}.$$

Der von $\mathcal{C}$ erzeugte Raum linearer Abbildungen sei mit $\mathcal{L} := \mathcal{C} - \mathcal{C}$ bezeichnet.

Lemma: Die Forderung

$$\forall (A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)) \quad \mathrm{tr}(\Lambda(A)^+ B) = \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(A^+ \otimes B)) \qquad \clubsuit$$

wird von genau einer linearen Abbildung

$$\mathbf{L} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$$

erfüllt. Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathbf{L}$ ist injektiv.

(ii) $\Lambda(A^+) = \Lambda(A)^+ \Leftrightarrow \mathbf{L}(\Lambda) = \mathbf{L}(\Lambda)^+$.

(iii) $\Lambda \in \mathcal{C}, A, B \geq 0 \Rightarrow \mathbf{L}(\Lambda)(A^+ \otimes B) \geq 0$.

Beweis: (1) Wegen der Linearität des Spurfunktionals folgt aus

$$\mathrm{tr}(\Lambda(A)^+ B) = \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(A^+ \otimes B)), \quad \mathrm{tr}(\Xi(A)^+ B) = \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Xi)(A^+ \otimes B))$$

unmittelbar

$$\mathrm{tr}((\lambda\Lambda(A) + \mu\Xi(A))^+ B) = \mathrm{tr}((\lambda\mathbf{L}(\Lambda) + \mu\mathbf{L}(\Xi))(A^+ \otimes B)),$$

so dass

$$\mathbf{L}(\lambda\Lambda + \mu\Xi) = \lambda\mathbf{L}(\Lambda) + \mu\mathbf{L}(\Xi)$$

ist. Damit bildet die Menge der Λ, für die $\clubsuit$ erfüllt werden kann, eine Linearmannigfaltigkeit in $\mathcal{L}$ auf der $\mathbf{L}$ linear ist.
(2) Aus $\clubsuit$ folgt ferner, dass diese Linearmannigfaltigkeit injektiv in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes$

$\mathcal{H}_2$) abgebildet wird, denn aus $\mathbf{L}(\Lambda) = \mathbf{L}(\Xi)$ folgt $\mathrm{tr}((\Lambda(A) - \Xi(A))B) = 0$ für alle A, B. Somit gilt $\Lambda(A) = \Xi(A)$ für alle A und damit $\Lambda = \Xi$.
(3) Sei $\dim \mathcal{H}_1 = M_1$ und $\{E_\nu\}_{\nu=11,2,\ldots,M_1^2}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, d.h. $\mathrm{tr}(E_\nu^+ E_\mu) = \delta_{\nu\mu}$, dann erfüllt für beliebiges $\Lambda \in \mathcal{C}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ der Ansatz

$$\mathbf{L}(\Lambda)(E_\nu^+ \otimes B) := \sum_\mu E_\mu E_\nu^+ \otimes \Lambda(E_\mu)^+ B$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(E_\nu \otimes B)) &= \mathrm{tr}(\sum_\mu E_\mu E_\nu^+ \otimes \lambda(E_\mu)^+ B) \\
&= \sum_\mu \mathrm{tr}(E_\mu E_\nu^+) \mathrm{tr}(\lambda(E_\mu)^+ B) = \mathrm{tr}(\Lambda(E_\nu)^+ B).
\end{aligned}$$

Da ein beliebiges $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ durch $A = \sum_{\nu=1}^{m_1^2} a_\nu E_\nu$ dargestellt werden kann, erfüllt aufgrund der Linearität von $\mathbf{L}(\Lambda)$ und des Spurfunktionals

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\Lambda)(A^+ \otimes B) &= \sum_\nu \overline{a}_\nu \mathbf{L}(\Lambda)(E_\nu^+ \otimes B) \\
&= \sum_\nu \overline{a}_\nu \sum_\mu E_\mu E_\nu^+ \otimes \Lambda(E_\mu)^+ B \\
&= \sum_\mu E_\mu A^+ \otimes \Lambda(E_\mu)^+ B
\end{aligned}$$

♣, denn

$$\mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(A^+ \otimes B)) = \sum_\mu \mathrm{tr}(E_\mu A^+) \mathrm{tr}(\Lambda(E_\mu)^+ B) = \mathrm{tr}(\Lambda(A)^+ B).$$

Damit ist $\mathbf{L}$ auf ganz $\mathcal{L}$ definiert.
(4) $\mathbf{L}$ ist einzig, denn sie Annahme, dass $\mathbf{M}(\Lambda)$ und $\mathbf{L}(\Lambda)$ die Forderung ♣ erfüllen und $\mathbf{M}(\Lambda) \neq \mathbf{L}(\Lambda)$ ist, liefert die Existenz eines $|\varphi >< \psi| \otimes \eta >< \omega|$ mit

$$\begin{aligned}
0 &\neq \mathrm{tr}((\mathbf{M}(\Lambda) - \mathbf{L}(\Lambda))(|\varphi >< \psi| \otimes \eta >< \omega|)) \\
&= \mathrm{tr}(\Lambda(|\varphi >< \psi|)^+ \eta >< \omega|) - \mathrm{tr}(\Lambda(|\varphi >< \psi|)^+ \eta >< \omega|) = 0,
\end{aligned}$$

führt also zum Widerspruch.
(5) Wählt man speziell $E_{iM_1+j} = |\varphi_i >< \varphi_j|$, $i, j = 0, 1, \ldots, M_1 - 1$, in (3),

dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\Lambda)^+ &= (\sum_{i,j} |\varphi_i >< \varphi_j| \otimes \Lambda(|\varphi_i >< \varphi_j|)^+)^+ \\
&= \sum_{i,j} |\varphi_j >< \varphi_i| \otimes \Lambda(|\varphi_i >< \varphi_j|) \\
&= \sum_{i,j} |\varphi_j >< \varphi_i| \otimes \Lambda(|\varphi_j >< \varphi_i|)^+ = \mathbf{L}(\Lambda).
\end{aligned}$$

(6) Ist $\Lambda \in \mathbf{C}$ und $A, B \geq 0$, dann ist $\mathbf{L}(\Lambda)(A^+ \otimes B) \geq 0$. Dies folgt, wenn man die Spektralzerlegungen von A und B betrachtet, aus

$$\begin{aligned}
< \varphi \otimes \psi, \mathbf{L}(\Lambda)\varphi \otimes \psi > &= \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)|\varphi >< \varphi| \otimes |\psi >< \psi|) \\
&= \mathrm{tr}(\Lambda(|\varphi >< \varphi|)^+|\psi >< \psi|) \geq 0.
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.