Zusammenfassung der 29. Vorlesung (01.08.08)

1.5 *Kriterien für die Unverschränktheit von Zusständen (Fortsetzung)*:

Satz(Jamiolkowski): Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, dann gilt

$$\begin{aligned} \Lambda \in \mathcal{C} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall (P = P^+ = P^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), Q = Q^+ = Q^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)) \\ &\qquad\quad \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(P \otimes Q)) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{L}(\Lambda) = \mathbf{L}(\Lambda)^+. \end{aligned}$$

Beweis: Die erste Äquivalenz ergibt sich so:

$$\Lambda \geq 0 \Longleftrightarrow \forall (\varphi \in \mathcal{H}_1) \;\; \Lambda(|\varphi >< \varphi|) = \Lambda(|\varphi >< \varphi|)^+ \geq 0,$$

und dies ist äquivalent dazu, dass für beliebiges $\psi \in \mathcal{H}_2$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad < \psi, \Lambda(|\varphi >< \varphi|)^+ \psi >= \mathrm{tr}(\Lambda(|\varphi >< \varphi|)^+ |\psi >< \psi|) \\ &= \quad \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(|\varphi >< \varphi|^+ \otimes |\psi >< \psi|) \\ &= \quad \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(|\varphi >< \varphi| \otimes |\psi >< \psi|), \end{aligned}$$

was wegen der Linearität des Spurfunktionals äquivalent zu der Ungleichung $\mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(P \otimes Q)) \geq 0$ ist. Die zweite Äquivalenz ergibt sich so: Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit der Aussagee. Zunächst gilt wieder

$$\Lambda \geq 0 \Longleftrightarrow \forall (\varphi \in \mathcal{H}_1) \;\; \Lambda(|\varphi >< \varphi|) = \Lambda(|\varphi >< \varphi|)^+ \geq 0.$$

Mit $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \ni A = X + iY$, wobei

$$X = (1/2)(A + A^+) = X^+, \qquad Y = (1/2i)(A - A^+) = Y^+$$

ist, gilt wegen der Linearität von Λ mit den Spektralzerlegungen von X und Y

$$\begin{aligned} \Lambda(A^+) \quad &= \quad \Lambda((X + iY)^+) = \Lambda(X) - i\Lambda(Y) \\ &= \quad \sum_i x_i \Lambda(|\chi_i >< \chi_i|) - i \sum_i y_i \Lambda(|\eta_i >< \eta_i|) \\ &= \quad \sum_i x_i \Lambda(|\chi_i >< \chi_i|)^+ - i \sum_i y_i \Lambda(|\eta_i >< \eta_i|)^+ \\ &= \quad (\Lambda(X) + i\Lambda(Y))^+ = \Lambda((X + iY))^+ = ((\Lambda(A))^+. \end{aligned}$$

Dies ist nach der Aussage (ii) im letzten Lemma äuivalent zu $\mathbf{L}(\Lambda) = \mathbf{L}(\Lambda)^+$. Die Hinlänglichkeit ergibt sich folgendermaßen. $\Lambda(A)^+ = \Lambda(A^+)$ und die Annahme $\exists(\varphi \in \mathcal{H}_1,\ \ \psi \in \mathcal{H}_2)\ \ < \psi, \Lambda(|\varphi >< \varphi|)\psi > < 0$ führt auf den Widerspruch (zur ersten Äquivalenz)

$$\mathrm{tr}(\Lambda(|\varphi >< \varphi|)|\psi >< \psi|) = \mathrm{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)(|\varphi >< \varphi| \otimes |\psi >< \psi|)) < 0.$$

Damit ist für bipartite Systeme gezeigt, dass $\mathbf{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ injektiv ist. Der folgende Satz zeigt auch die Surjektivität.

Satz: Für $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ ist $\mathbf{L} : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ bijektiv.

Beweis: Aus $H \in \mathcal{S}$ folgt $< \varphi \otimes \psi, H(\varphi \otimes \psi) > \geq 0$. Mit

$$\mathbf{L}(\Lambda) = \sum_{i,j} |\varphi_i >< \varphi_j| \otimes \Lambda(|\varphi_i >< \varphi_j|)^+ = \sum_{i,j} |\varphi_i >< \varphi_j| \otimes \Lambda(|\varphi_j >< \varphi_i|)$$

folgt aus der Annahme

$$\exists(H \in \mathcal{S})\, \forall(\Lambda \in \mathcal{C})\ \ \mathbf{L}((\Lambda) - H \neq 0$$

die Existenz eines $\chi \in \mathcal{H}_1$ und eines $\psi \in \mathcal{H}_2$, etwa $\|\chi\| = \|\psi\| = 1$, so dass $\forall(\Lambda \in \mathcal{C})$

$$\begin{aligned}
0 &\neq < \chi \otimes \psi, (\mathbf{L} - H)(\chi \otimes \psi) > \\
&= \sum_{i,j} < \chi \otimes \psi, (|\varphi_i >< \varphi_j| \otimes \Lambda(|\varphi_j >< \varphi_i|))(\chi \otimes \psi) > \ - \ h \\
&= \sum_{i,j} < \chi, \varphi_i >< \varphi_j, \chi >< \psi, \Lambda(|\varphi_j >< \varphi_i|)\psi) > \ - \ h \\
&= < \psi, \Lambda(|\chi >< \chi|)\psi > \ - \ h,
\end{aligned}$$

wobei $h :=< \chi \otimes \psi, H(\chi \otimes \psi > \geq 0$ ist. Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ sei

$$\begin{aligned}
\Lambda(A) &:= h\,\mathrm{tr}_1(|\chi >< \chi|A \otimes |\psi >< \psi|) \\
&= h \sum_{i,k,l} |\omega_k >< \varphi_i \otimes \omega_k, (|\chi >< \chi|A \otimes |\psi >< \psi|)(\varphi_i \otimes \omega_l) >< \omega_l| \\
&= h \sum_{i,k,l} |\omega_k >< \varphi_i, \chi >< \omega_k, \psi >< \chi, A\varphi_i >< \psi, \omega_l >< \omega_l| \\
&= h\ |\psi >< \chi, A\chi >< \psi|.
\end{aligned}$$

Dann ist $\Lambda(A^+) = \Lambda(A)^+$ und $\Lambda \in \mathcal{C}$. Speziell ist $\Lambda(|\chi >< \chi|) = h\,|\psi >< \psi|$, also

$$0 \neq < \psi, \Lambda(|\chi >< \chi|)\psi > -h = 0,$$

ein Widerspruch.

Für bipartite Zustände kann das Lemma von Horodecki auch in folgender Weise ausgesprochen werde.:

Lemma: Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, dann gilt

$$\sigma \in \mathcal{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall(\Lambda \in \mathcal{C})\ \operatorname{tr}(\mathbf{L}(\Lambda)\sigma) \geq 0.$$

Als **Transposition eines Operators in Bezug auf die Basis** $\{\varphi_i\}$ bezeichnet man die Abbildung

$$T_\varphi : A = \sum_{i,j} a_{ij} |\varphi_i >< \varphi_j| \quad \longmapsto \quad A^{T_\varphi} \sum_{i,j} a_{ji} |\varphi_i >< \varphi_j|.$$

T_φ ist offenbar linear und positiv. Ferner gilt $(A^{T_\varphi})^+ = (A^+)^{T_\varphi}$. T_φ ist aber nicht vollständig positiv. Die **partielle Transposition** $(\mathbf{1} \otimes T_\varphi)$ ist keine positive Abbildung. Für $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$ $\varphi_i = |i>$ rechnet man leicht nach, dass $(\mathbf{1} \otimes T_\varphi)|\Psi >< \Psi|$, $\Psi = (1/\sqrt{2})(|00> + |11>)$ kein positiver Operator ist:

$$\frac{1}{2}(< 01| - < 10|)(\mathbf{1} \otimes T_\varphi)|\Psi >< \Psi|(|01> - |10>) = -\frac{1}{2}.$$

Lemma: Sei $\dim \mathcal{H}_1 = M_1 \leq \dim \mathcal{H}_2 < \infty$ und $\Lambda \in \mathcal{C}$, dann gilt für jeden maximal verschränkten Zustand $\Psi = (1/\sqrt{M_1}) \sum_i \varphi_i \otimes \varphi_i$ in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$

$$\mathbf{L}(\Lambda) = M_1(\mathbf{1} \otimes \Lambda \circ T_\varphi)|\Psi >< \Psi|.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}(\Lambda) &= \sum_{i,j} |\varphi_i >< \varphi_j| \otimes \Lambda(|\varphi_j >< \varphi_i|) \\
&= (\mathbf{1} \otimes \Lambda) \sum_{i,j} |\varphi_i >< \varphi_j| \otimes (|\varphi_j >< \varphi_i|)^{T_\varphi} \\
&= M_1(\mathbf{1} \otimes \Lambda \circ T_\varphi) \left| \frac{1}{\sqrt{M_1}} \sum_i \varphi_i \otimes \varphi_i \right\rangle \left\langle \frac{1}{\sqrt{M_1}} \sum_j \varphi_j \otimes \varphi_j \right|.
\end{aligned}$$