Zusammenfassung der 30. Vorlesung (06.08.08)

1.5 *Kriterien für die Unverschränktheit von Zusständen (Fortsetzung)*:

Mit der partiellen Transposition lässt sich das Horodecki Lemma auch so ausdrücken:

Lemma: Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ $\dim \mathcal{H}_1 = M_1 \leq \dim \mathcal{H}_2 < \infty$, und in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ sei $\Psi = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \sum_{i=1}^{M_1} \varphi_i \otimes \varphi_i$ ein beliebiger maximal verschränkter Zustand. Dann gilt

$$\sigma \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \Lambda \in \mathcal{C}) \ \operatorname{tr}(\sigma((\mathbf{1} \otimes \Lambda \circ T_\varphi)|\Psi >< \Psi|)) \geq 0.$$

Für eine lineare Abbildung $\mathbf{M} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ wird durch

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{H}_1}(\mathbf{M}^*(A)^+ B) = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_2}(A^+ \mathbf{M}(B))$$

die adjungierte lineare Abbildung definiert. Ist $\{\varphi_i\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_1$, $\{\psi_\nu\}$ eine solche in $\mathcal{H}_2$ und

$$\mathbf{M}(|\varphi_i >< \varphi_k|) = \sum_{\nu\mu} M_{ij\nu\mu} |\psi_\nu >< \psi_\mu|,$$

dann ist

$$\begin{aligned} M_{ij\nu'\mu'} &= \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_2}(|\psi_{\nu'} >< \psi_{\mu'}|^+ \mathbf{M}(|\varphi_i >< \varphi_k|)) \\ &= \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_1}(\mathbf{M}^*(|\psi_{\nu'} >< \psi_{\mu'}|)^+ |\varphi_i >< \varphi_k|) \\ &= \overline{\operatorname{tr}_{\mathcal{H}_1}(|\varphi_i >< \varphi_k|^+ \mathbf{M}^*(|\psi_{\nu'} >< \psi_{\mu'}|))}, \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{M}^*(|\psi_\nu >< \psi_\mu|) = \sum_{ij} \overline{M}_{ij\nu\mu} |\varphi_i >< \varphi_j|.$$

Mithin ist die Adjunktion der linearen Abbildungen involutiv, $M^{**} = M$, und damit bijektiv. Für $T_\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1); |\varphi_k >< \varphi_l| \mapsto |\varphi_l >< \varphi_k|$ gilt

$$\operatorname{tr}(|\varphi_i >< \varphi_j|^+ T_\varphi(|\varphi_k >< \varphi_l|) = \delta_{il}\delta_{jk}$$

ist

$$T_\varphi^*(|\varphi_k >< \varphi_l|) = \sum_{ij} \delta_{il}\delta_{jk} |\varphi_i >< \varphi_j| = |\varphi_l >< \varphi_k| = T_\varphi(|\varphi_k >< \varphi_l|).$$

Ferner gilt für $\mathbf{M} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, $\mathbf{N} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_3}(A^+\mathbf{N} \circ \mathbf{M}(B)) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(\mathbf{N}^*(A)^+\mathbf{M}(B)) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1}(\mathbf{M}^* \circ \mathbf{N}^*(A)^+B),$$

also $(\mathbf{N} \circ \mathbf{M})^* = \mathbf{M}^* \circ \mathbf{N}^*$. Wegen

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_2}(\sigma((\mathbf{1} \otimes \Lambda \circ T_\varphi)|\Phi >< \Phi|)) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_1}(((\mathbf{1} \otimes T_\varphi^* \circ \Lambda^*)\sigma)|\Phi >< \Phi|),$$

$\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$, kann das Horodecki Lemma nun in folgender Form ausgesprochen weden:

Lemma: Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \dim \mathcal{H}_1 = M_1 \leq \dim \mathcal{H}_2 < \infty$, und in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ sei $\Psi = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \sum_{i=1}^{M_1} \varphi_i \otimes \varphi_i$ ein beliebiger maximal verschränkter Zustand. Dann gilt

$$\sigma \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \Lambda \in \mathcal{C})\ \mathrm{tr}(((\mathbf{1} \otimes T_\varphi \circ \Lambda^*)\sigma)|\Psi >< \Psi|) \geq 0.$$

Behauptung: Sei $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ linear, dann gilt

$$\Lambda \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Lambda^* \geq 0.$$

Beweis: Sei $\Lambda \geq 0$ und $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \ni A \geq 0$ dann ist $\forall \psi \in \mathcal{H}_2$

$$< \psi, \Lambda(A)\psi >= \mathrm{tr}(|\psi >< \psi|\Lambda(A)) = \mathrm{tr}(\Lambda^*(|\psi >< \psi|)A) \geq 0.$$

Da $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \ni B \geq 0$ die Form $B = \sum_k b_k|\psi_k >< \psi_k|$ mit $b_k \geq 0$ hat, folgt für beliebiges $\psi \in \mathcal{H}_2$ mit $A = |\psi >< \psi|$

$$\mathrm{tr}(\Lambda^*(B)|\psi >< \psi|) =< \psi, \Lambda^*(B)\psi >\geq 0.$$

Die Umkehrung folgt analog.

Da die Adjunktion bijektiv ist, folgt aus der letzten Behauptung, dass $\mathcal{C}^*$, die Mengew aller Λ^* mit $\Lambda \in \mathcal{C}$, die Menge aller positiven linearen Abbildungen $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ ist. Da die Komposition positiver linearer Abbildungen eine positive lineare Abbildung ergibt, und die Transpositionen T_φ involutiv und damit bijektiv sind, gelten auch $\mathcal{C} \circ T_\varphi = \mathcal{C}$ und $T_\varphi \circ \mathcal{C}^* = \mathcal{C}^*$. Damit kann das Horodecki Lemma auch in der Form ausgedrückt werden, die als Horodecki Kriterium bekannt ist:

Horodecki Kriterium: Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ $\dim \mathcal{H}_1 = M_1 \leq \dim \mathcal{H}_2 < \infty$, und in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ sei $\Psi = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \sum_{i=1}^{M_1} \varphi_i \otimes \varphi_i$ ein beliebiger maximal verschränkter Zustand. Dann gilt

$$\sigma \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \Lambda \in \mathcal{C}) \ \mathrm{tr}(((\mathbf{1} \otimes \Lambda^*)\sigma)|\Psi >< \Psi|) \geq 0.$$

Ein Problem ist die Charakterisierung der positiven linearen Abbildungen von Operatoren, die nur für die Fälle $(\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2) = (2,2), (2,3), (3,2)$ bekannt ist. Den folgenden Satz beweisen wir im nächsten Abschnitt.

Satz(Störmer, Woronowicz): Seien $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ Hilbertrräume der Dimensionen $(\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2) = (2,2), (2,3), (3,2)$. Eine lineare Abbildung $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ ist genau dann positiv, wenn sie mit linearen Abbildungen $S_i, R_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ und einer Transposition T auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ in der Form

$$\Phi(A) = \sum_i S_i^+ A S_i + \sum_k R_k^+ A^T R_k$$

dargestellt werden kann.

Mit diesem Satz kann man das bekannte PPT-Kriterium von Asher Peres beweisen.

Peres Kriterium: Sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $(\dim \mathcal{H}_1, \dim \mathcal{H}_2) = (2,2), (2,3)$ oder $(3,2)$ und T eine Transposition T auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Dann gilt

$$\sigma \in \mathcal{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathbf{1} \otimes T)\sigma \geq 0.$$

Beweis: Die Notwendigkeit folgt aus der Positivität von T. Die Hinlänglichkeit folgt aus dem Horodecki Kriterium und dem letzten Satz: Mit $(\mathbf{1} \otimes T)\sigma \geq 0$ folgt für alle $\Lambda \in \mathcal{C}$

$$(\mathbf{1} \otimes \Lambda^*)\sigma = (\mathbf{1} \otimes \mathbf{J}_1^*)\sigma + (\mathbf{1} \otimes \mathbf{J}_2^*)(\mathbf{1} \otimes T)\sigma \geq 0,$$

da $\mathbf{J}_2^*(B) = \sum_i S_i B S_i^+$ und $\mathbf{J}_2^* = \sum_i R_i B R_i^+$ positive lineare Abbildungen sind.

1.6 *Zur Charakterisierung positiver linearer Abbildungen von Operatoren*:

Lemma: Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, $\dim\mathcal{H}_1 = 2$, $\dim\mathcal{H}_2 = N < \infty$, dann gelten die folgenden Aussagen:
(1) Sei $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ eine lineare Abbildung, $B \in \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2$ und

$$\omega(B,\phi) = \mathrm{tr}\left(B\begin{pmatrix} \Phi(|0><0| & \Phi(|0><1| \\ \Phi(|1><0| & \Phi(|1><1| \end{pmatrix}\right).$$

Auf diese Weise ist eine Dualität zwischen $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ und dem $\mathbf{C}$-linearen Raum $\mathcal{F}$ der linearen Abbildungen $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ definiert, d.h. ω ist bilinear und es gelten die Aussagen

$$\begin{aligned} (\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2))\ \omega(B,\Phi) = \omega(B,\tilde{\Phi}) \quad &\Longrightarrow \quad \Phi = \tilde{\Phi}, \\ (\forall \Phi \in \mathcal{F})\ \omega(B,\Phi) = \omega(\tilde{B},\Phi) \quad &\Longrightarrow \quad B = \tilde{B}. \end{aligned}$$

(2) Φ ist genau dann positiv, wenn für alle *einfachen* Vektoren $\Psi = \lambda_1\psi \oplus \lambda_2\psi$ aus $\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2$, $\lambda_i \in \mathbf{C}$, $\psi \in \mathcal{H}_2$ gilt $\omega(|\Psi><\Psi|,\Phi) \geq 0$.
(3) Es gilt $\Phi(A) = \sum_k S_k^+ A S_k$, wobei $S_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ linear ist, genau dann, wenn für $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ gilt $B \geq 0 \Rightarrow \omega(B,\Phi) \geq 0$.
(4) Es gilt $\Phi(A) = \sum_k S_k^+ A^T S_k$, wobei $S_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ linear ist, genau dann, wenn für $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ gilt $B^\tau \geq 0 \Rightarrow \omega(B,\Phi) \geq 0$. Dabei ist mit $B = ((B_{ij}))$ der blocktransponierte Operator $B^\tau = ((B_{ji}))$

Beweis: (1) Offenbar ist ω bilinear und Φ legt das lineare Funktional $\omega(\cdot,\Phi)$ auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ fest. Ist umgekehrt auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ ein lineares Funktional f gegeben, dann gibt es genau einen Operator $F = ((F_{ij}))$ auf $\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2$ mit

$$f(B) = \mathrm{tr}(BF) = \mathrm{tr}\sum_{i,j=0}^{1} B_{ij}F_{ji},$$

und mit $\Phi(|j><i|) := F_{ji}$ wird eine lineare Abbildung $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ bestimmt, die auf $f = \omega(\cdot,\Phi)$ führt, und $F \mapsto \Phi$ ist offenbnar bijektiv. Die Trennungseigenschften von ω ergeben sich deshalb aus denen des Spurfunktionals Die Linearformen auf $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ und die linearen Abbildungen $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ stehen also in bijektiver Korrespondenz zueinander.

(2) Mit $\psi \in \mathcal{H}_2$, $\lambda_i \in \mathbf{C}$ und $\Psi = \lambda_1\psi \oplus \lambda_2\psi$ ist

$$\begin{aligned}
\omega(|\Psi >< \Psi|, \Phi) &= < \Psi, \begin{pmatrix} \Phi(|0 >< 0| & \Phi(|0 >< 1| \\ \Phi(|1 >< 0| & \Phi(|1 >< 1| \end{pmatrix} \Psi > \\
&= < \psi, \Phi(\sum_{ij=0}^{1} \overline{\lambda}_i \lambda_j |i >< j|)\psi >,
\end{aligned}$$

und

$$\sum_{ij=0}^{1} \overline{\lambda}_i \lambda_j |i >< j| = (\lambda_0|0 > +\lambda_1|1 >)(\overline{\lambda}_0 < 0| + \overline{\lambda}_1 < 1|) = \|\varphi\|^2 |\varphi >< \varphi|$$

ist ein positiver Operator vom Rang 1 auf $\mathcal{H}_1$. Somit gilt für die positiven linearen Abbildungen Φ, dass $\omega(|\Psi >< \Psi|, \Phi) \geq 0$ für alle *einfachen* Vektoren $\Psi = \lambda_1\psi \oplus \lambda_2\psi$ ist. Gilt letzteres, dann muss Φ auch positiv sein, weil jeder positive Operator auf $\mathcal{H}_1$ spektral als Summe aus zwei positiven Operatoren vom Rang 1 dargestellt werden kann.

(3) Sei $\psi \in \mathcal{H}_2$. Offenbar kann jede lineare Abbildung $S : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ in der Form

$$S(\psi) =< \xi_0, \psi > |0 > + < \xi_1, \psi > |1 >$$

mit $\Xi = \xi_1 \oplus \xi_2 \in \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2$ geschrieben werden. Sei nun

$$\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2); A \mapsto S^*AS,$$

dann ist mit $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$

$$\begin{aligned}
&\omega(B, \Phi) = \\
&\mathrm{tr}\left(B \begin{pmatrix} \Phi(|0 >< 0|) & \Phi(|0 >< 1|) \\ \Phi(|1 >< 0|) & \Phi(|1 >< 1|) \end{pmatrix}\right) = \\
&\mathrm{tr}\left(B \begin{pmatrix} |\xi_0 >< \xi_0| & |\xi_0 >< \xi_1| \\ |\xi_1 >< \xi_0| & |\xi_1 >< \xi_1| \end{pmatrix}\right) = \\
&\mathrm{tr}\begin{pmatrix} B_{00}|\xi_0 >< \xi_0| + B_{01}|\xi_1 >< \xi_0| & B_{00}|\xi_0 >< \xi_1| + B_{01}|\xi_1 >< \xi_1| \\ B_{10}|\xi_0 >< \xi_0| + B_{11}|\xi_1 >< \xi_0| & B_{10}|\xi_0 >< \xi_1| + B_{11}|\xi_1 >< \xi_1| \end{pmatrix} = \\
&\mathrm{tr}((B_{00}|\xi_0 > +B_{01}|\xi_1 >) < \xi_0|) + \mathrm{tr}((B_{10}|\xi_0 > +B_{11}|\xi_1 >) < \xi_1|) = \\
&< \xi_1 \oplus \xi_2, B(\xi_1 \oplus \xi_2) >=< \Xi, B\Xi > .
\end{aligned}$$

Wegen der Linearität von ω im zweiten Argument gilt für $\Phi_i(A) = S_i^+ A S_i$, $\Phi = \sum_i \Phi_i$ dass

$$\omega(\cdot, \Phi) = \omega(\cdot, \sum_i \Phi_i) = \sum_i \omega(\cdot, \Phi_i)$$

ist, und $B \geq 0 \Rightarrow \omega(B, \Phi) \geq 0$. Gilt die letztere Aussage, dann gilt

$$F := \begin{pmatrix} \Phi(|0><0| & \Phi(|0><1| \\ \Phi(|1><0| & \Phi(|1><1| \end{pmatrix} \geq 0,$$

denn wegen $B \geq 0 \Rightarrow \omega(B, \Phi) = \mathrm{tr}(BF) \geq 0$ kann F keine negativen Eigenwerte haben. Folglich kann die Spektralzerlegung in der Form

$$\begin{pmatrix} \Phi(|0><0| & \Phi(|0><1| \\ \Phi(|1><0| & \Phi(|1><1| \end{pmatrix} = \sum_k |\Xi_k >< \Xi_k|.$$

mit Vektoren $\Xi_k = \xi_{k0} \oplus \xi_{k1}$ geschrieben werden. Sei nun

$$S_k = |0 >< \xi_{k0}| + |1 >< \xi_{k1}|,$$

dann wird $F = \sum_k |\Xi_k >< \Xi_k|$ von

$$\Phi(A) = \sum_k S_k^* A S_k$$

erfüllt. $B \geq 0 \Rightarrow \omega(B) \geq 0$ ist also notwendig und hinreichend dafür, dass Φ diese Form hat.

(4)Es gilt

$$\mathrm{tr}(BF) = \mathrm{tr}((BF)^\tau) = \mathrm{tr}(F^\tau B^\tau) = \mathrm{tr}(B^\tau F^\tau)$$

und $A^T = \sum_{i,j=0}^1 a_{ji}|i >< j| = \sum_{i,j=0}^1 a_{ij}|j >< i|$. Sei nun

$$\tilde{\Phi} = \Phi \circ T : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2); A \mapsto S^+ A^T S,$$

wobei Φ wie in (3)definiert ist, dann ist (vgl. (3)) mit $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$

$$\begin{aligned} \omega(B, \tilde{\Phi}) &= \mathrm{tr}\left(B \begin{pmatrix} \Phi(|0><0|^T) & \Phi(|0><1|^T) \\ \Phi(|1><0|^T) & \Phi(|1><1|^T) \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(B \begin{pmatrix} \Phi(|0><0|) & \Phi(|0><1|) \\ \Phi(|1><0|) & \Phi(|1><1|) \end{pmatrix}^\tau\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(B^\tau \begin{pmatrix} \Phi(|0><0|) & \Phi(|0><1|) \\ \Phi(|1><0|) & \Phi(|1><1|) \end{pmatrix}\right) = < \Xi, B^\tau \Xi > . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann mit den gleichen Schlussweisen wie in (3).

Korollar: Sei ω die im vorstehenden Lemma definierte Dualität, dann gilt:
(1) Sei $W := \{\sum_i \alpha_i |\Psi_i >< \Psi_i|, \Psi_i \in \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2, \Psi_i \text{ einfach}, \alpha \geq 0\}$ der von den einfachen Vektoren erzeugte Kegel in $\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2$. Der Kegel der positiven linearen Abbildungen $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ in $\mathcal{F}$ stimmt mit dem Dualkegel $W^* = \{\Phi | Q \in W \Rightarrow \omega(Q, \Phi) \geq 0\}$ überein.
(2) Sei $V := \{Q | 0 \leq Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)\}$ der Kegel der positiven Operatoren. Der Kegel der linearen Abbildungen der Form $\Phi(A) = \sum_i S_i^+ A S_i$ stimmt mit dem Dualkegel $V^* = \{\Phi | Q \in V \Rightarrow \omega(Q, \Phi) \geq 0\}$ überein.
(3) Sei $V^\tau := \{Q | 0 \leq Q^\tau \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)\}$ der Kegel der kopositiven Operatoren. Der Kegel der linearen Abbildungen der Form $\Phi(A) = \sum_i S_i^+ A^T S_i$ stimmt mit dem Dualkegel $V^{\tau *} = \{\Phi | Q \in V \Rightarrow \omega(Q, \Phi) \geq 0\}$ überein.

Dualkegel sind offenbar stets konvex und C^{**} ist die schwach abgeschlossene konvexe Hülle eines Kegels C. Sind C, D Kegel, dann zeigt man leicht, dass

$$C \subseteq D \quad \Longrightarrow \quad D^* \subseteq C^*$$

und

$$C^* \cup D^* \subseteq (C \cap D)^*, \qquad (C \cup D)^* \subseteq C^* \cap D^*$$

gelten

Die linearen Abbildungen $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ der Form

$$\Phi(A) = \sum_i S_i^+ A S_i + \sum_k R_k^+ A^T R_k$$

bilden nach dem Korollar den Kegel $\mathrm{conv}(V^* \cup V^{\tau *})$ und, da die Abbildung Φ positiv ist, gilt auch $\mathrm{conv}(V^* \cup V^{\tau *}) \subseteq W^*$. Die Frage ist, ob $\mathrm{conv}(V^* \cup V^{\tau *})$ alle positiven Abbildungen enthält. Ist dies der Fall, dann ist

$$W^* = \mathrm{conv}(V^* \cup V^{\tau *}) \subseteq (V \cap V^\tau)^*,$$

und dies ist äquivalent zu

$$V \cap V^\tau \subseteq W.$$

Ein Kegel C eines Vektorraumes heißt ein konvexer Kegel, wenn mit $X, Y \in C$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ auch $\frac{1}{\alpha+\beta}(\alpha X + \beta Y) \in C$ bzw. $\alpha X + \beta Y \in C$

ist, weil mit $Z \in C$. $\gamma \in \mathbf{R}_0^+$ auch $\gamma Z \in C$ ist. Aus der letzteren Eigenschaft folgt, dass nur der Scheitel eines Kegels Extremalpunkt sein kann. Ist $L \neq 0$ ein lineares Funktional mit der Eigenschaft $Z \in C \Rightarrow L(Z) \geq 0$ und $\delta > 0$, dann sei $\Delta := \{Z \in C | L(Z) = \delta\}$. Offenbar gilt $C = \mathbf{R}_0^+ \Delta$ und C ist genau dann konvex, wenn Δ konvex ist. Δ wird eine Kegelbasis genannt und im konvexen Fall ist Δ die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte. Ist $E \in \Delta$ ein Extremalpunkt, dann werden die $Q \in \mathbf{R}^+ E$ auch extremale Elemente des Kegels C genannt. Ist Q ein solches Element und gilt $P \in C \cap (Q - C)$, dann folgt $P = \gamma Q$ mit $\gamma > 0$. Anders ausgwdrückt: Ist C der positive Kegel und Q extremales Element von C, dann gilt $0 \leq P \leq Q \Rightarrow P = \gamma Q$ mit $\gamma > 0$.

Zur Vorbereitung des nächsten Satzes machen wir eine weitere Überlegung: Sei $\Psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \in \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2$, dann ist

$$|\Psi >< \Psi| = \begin{pmatrix} |\psi_1 > \\ |\psi_2 > \end{pmatrix} (< \psi_1| \;\; < \psi_2|) = \begin{pmatrix} |\psi_1 >< \psi_1| & \psi_1 >< \psi_2| \\ |\psi_2 >< \psi_1| & \psi_2 >< \psi_2| \end{pmatrix}$$

stets positiv. Jedoch gilt dies nicht für für den blocktransponierten Operator,

$$|\Psi >< \Psi|^\tau = \begin{pmatrix} |\psi_1 >< \psi_1| & \psi_2 >< \psi_1| \\ |\psi_1 >< \psi_2| & \psi_2 >< \psi_2| \end{pmatrix},$$

falls $\{\psi_1, \psi_2\}$ linear unabhängig sind. In diesem Fall lässt sich stets ein Vektor $\Xi = \xi_2 \oplus \xi_2$ angeben, für den $< \Xi, |\Psi >< \Psi^\tau \Xi >$ negativ ist. Es ist

$$\begin{aligned} & (< \xi_1| \;\; < \xi_2|) \begin{pmatrix} |\psi_1 >< \psi_1| & \psi_2 >< \psi_1| \\ |\psi_1 >< \psi_2| & \psi_2 >< \psi_2| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\xi_1 > \\ |\xi_2 > \end{pmatrix} \\ = \;& < \xi_1, \psi_1 >< \psi_1, \xi_1 > + < \xi_1, \psi_2 >< \psi_1, \xi_2 > \\ + \;& < \xi_2, \psi_1 >< \psi_2, \xi_1 > + < \xi_2, \psi_2 >< \psi_2, \xi_2 > . \end{aligned}$$

Wählt man nun mit $\epsilon \neq 0$

$$\begin{aligned} \xi_1 = \epsilon_1(\alpha\, \psi_1 + \psi_2) \perp \psi_1, \quad \text{d. h.} \quad \alpha = -\frac{< \psi_2, \psi_1 >}{\|\psi_1\|^2}, \\ \xi_2 = \epsilon_2(\psi_1 + \beta\, \psi_2) \perp \psi_2, \quad \text{d. h.} \quad \beta = -\frac{< \psi_1, \psi_2 >}{\|\psi_2\|^2}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} < \xi_1, \psi_1 >= 0, \qquad < \xi_1, \psi_2 >= \epsilon_1(\|\psi_1\|^2 - \frac{| < \psi_1, \psi_2 > |^2}{\|\psi_2\|^2}); \\ < \xi_2, \psi_2 >= 0, \qquad < \xi_2, \psi_1 >= \epsilon_1(\|\psi_2\|^2 - \frac{| < \psi_2, \psi_1 > |^2}{\|\psi_1\|^2}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Schwarzschen Ungleichung sind die Ausdrücke in den Klammern positiv, falls $\{\psi_1, \psi_2\}$ linear unabhängig sind und verschwinden genau dann, wenn $\{\psi_1, \psi_2\}$ linear abhängig sind. Wählt man im linear unabhängigen Fall $\epsilon_i = (-1)^i$, dann ist $< \Xi, |\Psi >< \Psi|^\tau \Xi > < 0$. Im linear abhängigen Fall ist $\Psi = \lambda_1 \psi \oplus \lambda \psi$ ein einfacher Vektor und

$$\begin{aligned} |\Psi >< \Psi|^\tau &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \overline{\lambda}_1 |\psi >< \psi| & \lambda_2 \overline{\lambda}_1 |\psi >< \psi| \\ \lambda_1 \overline{\lambda}_2 |\psi >< \psi| & \lambda_2 \overline{\lambda}_2 \psi >< \psi| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 |\psi > \\ \overline{\lambda}_2 |\psi > \end{pmatrix} (\lambda_1 < \psi_1| \; \lambda_2 < \psi_2|) = |\Psi^\tau >< \Psi^\tau| \end{aligned}$$

ist stets positiv. Damit folgt: Ist $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2) \ni B \neq 0$ und $B \geq 0$, oder äquivalent ausgedrückt $B = \sum_k b_k |\Psi_k >< \Psi_k|$ mit $b_k > 0$, dann ist $B^\tau = \sum_k b_k |\Psi_k >< \Psi_k|^\tau \geq 0$ genau dann, wenn die Eigenvektoren Ψ_k von B einfach sind.

Satz(Woronowicz): Seien $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ Hilberträume, $\dim \mathcal{H}_1 = 2$, $\dim \mathcal{H}_2 = N < \infty$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}\mathcal{H}_2$ ist genau dann positiv, wenn mit linearen Abbildungen $S_i, R_k : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$

$$\Phi(A) = \sum_i S_i^+ A S_i + \sum_k R_k^+ A^T R_k$$

gilt.

(2) Für jeden Operator $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ ibt es einen einfachen Vektor $\Psi \in \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$, $\Psi \neq 0$, für den $\Psi \in B(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ und $\Psi^\tau \in B^\tau(\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2)$ gelten.

Beweis: Nach den vorstehenden Überlegungen ist (1) äquivalent zu $V \cap V^\tau \subseteq W$. Die letztere Aussage ist hinreichen für (2), denn $0 \neq B \in V \cap V^\tau$ heisst $B \geq 0$ und $B^\tau \geq 0$. Aus $B = \sum_k q_k |\Theta_k >< \Theta_k|$ folgt nach der Vorüberlegung $B^\tau = \sum_k q_k |\Theta >< \Theta_k|^\tau$. Da auch der blocktransponierte Operator positiv st, sind die Eigenvektoren von B eifach und bestätigen die Aussage (2). Gilt Aussage (2), dann sei $Q \neq 0$ ein beliebiges extremales Element des konvexen Kegels $V \cap V^\tau$. Wegen $Q \geq 0$ und $q^\tau \geq 0$ gibt es einen einfachen Vektor $\Psi \neq 0$ im Bildbereich von Q mit Φ^τ im Bildbereich vonQ^τ. Sei $Q = \sum_k q_k \Xi_k$, $q_k > 0$, dann folgt aus $< \Lambda, Q\Lambda >= \sum_k q_k| < \Xi_k, \Lambda > |^2 = 0$, dass $| < \Xi_k, \Lambda > |^2 = 0$ für alle k und somit $| < \Psi_k, \Lambda > |^2 = 0$, denn die Ξ_k spannen den Bildbereich von Q auf. Analoges gilt für Q^τ. Deshalb gelten für ein hinreichend kleines

$\epsilon > 0$

$$Q \geq \epsilon|\Psi><\Psi| \geq 0, \qquad Q^\tau \geq \epsilon|\Psi><\Psi|^\tau \geq 0.$$

Damit gilt $Q = \alpha|\Psi><\Psi| \in W$, weil Ψ einfach ist. Die extremalen Elemente von $V \cap V^\tau$ liegen also in W und damit gilt $V \cap V^\tau \subseteq W$.