Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. K.-E.Hellwig

09.05.08
Abgabe: 23.05.08

7. Übungsblatt zur Quanteninformationstheorie I u.II

Nächste Übung: Fr.,16.05.08, 13:00, Raum PN-733

Aufgabe 19 (2 Punkte): Alice und Bob mögen sich den bipartiten reinen Zustand $\Psi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\dim \mathcal{H}_i < \infty$, teilen.
(a) Bob führe an seinem Teilchen die lokale Messoperation $\mathcal{J}_B : \rho \mapsto \sum_{k=1}^{K} B_k \rho B_k^+$, $\sum_k B_k^+ B_k = \mathbf{1}$ aus. Für den bipartiten Zustand $\sum_k p_k < \Phi_k >< \Phi_k|$ nach der (nichtselektiven) Operation gebe man die expliziten Ausdrücke für p_k und die normierten Φ_k an.
(b) Führt Alice an Ihrem Teilchen überdies die Messoperation $\mathcal{J}_A : \rho \mapsto \sum_{l=1}^{L} A_l \rho A_l^+$, $\sum_l A_l^+ A_l = \mathbf{1}$ aus, dann sei der Zustand nach beiden (nichtselektiven) Operationen $\sum_{k,l} q_{kl} |\Xi_{kl} >< \Xi_{kl}|$. Man gebe die expliziten Ausdrüche für q_{kl} und die normierten Xi_{kl} an.
Durch Ablesen der Messergebnisse und gegenseitige klassische Kommunikation können Alice und Bob erfahren, welcher der bipartiten Zustände Ξ_{kl} nach den Operationen vorliegt. Falls Alice und Bob sich eine Gesamtheit bipartiter Syysteme im Zustand Ψ teilen, können sie, falls $q_{kl} > 0$ ist, durch Selektion eine Gesamtheit bipartiter Systeme im Zustand Ξ_{kl} präparieren.

Aufgabe 20 (5 Punkte): Tatsächlich genügt es zur LOCC-Präparation von Ξ_{kl} durch selektive Operationen in der Situation von Aufgabe 19 schon aus, wenn nur Alice zu Bob sprechen kann. Die Operation $\mathcal{J}_B$ von Aufgabe 19(a) kann durch eine bestimmte Operation $\mathcal{I}_A$ an Alice's Teilchen und nachfolgender unitätrer Zustabdsumwandlung an Bob's Teilchen ersetzt werden: Alice Teilt Bob das Ergebnis ihrer Messung mit und Bob wndelt den Zustand seines Teilchen durch eine entsprechende unitäre Transformation (wie bei der Teleportaion). Dazu zeige man: Es gibt Operatoren A_k auf $\mathcal{H}_1$ mit $\sum_k A_k^+ A_k = \mathbf{1}$ und unitäre Operatoren U_k auf $\mathcal{H}_2$ mit der Eigenschaft

$$(\mathbf{1} \otimes B_i)\Psi = (A_k \otimes U_k)\Psi.$$

Dies ergibt sich, wenn man Ψ in der Schimdt Darstelleung, $\Psi = \sum_\nu c_\nu \varphi_\nu \otimes \psi_\nu$, betrachtet, $B_k \psi_\mu$ als Matrizenmultiplikation in der (ggf. vervollständigten) Basis ψ_κ ausschreibt und die Eigenscft des Tesorproduktes ausnutzt, um dann einen Operator in $\mathcal{H}_1$ zu definieren. Eine lokale unitäre Transformation führt schließlich auf die behauptete Gleichung. Man stelle das Protokoll für die Präparation von Ξ_{kl} auf, wobei nur erlaubt ist, dass Allice zu Bob spricht.

Aufgabe 21 (3 Punkte): Sei $\rho = \sum_{i=1}^{4} \mu_i |\Phi_i >< \Phi_i|$, wobei $\mu_i \geq 0$, $\sum_i \mu_i = 1$ und $|\Phi_i >$ die Bell Basis

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00> + |11>), \qquad \Phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(|00> - |11>),$$
$$\Phi_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}(|01> + |10>), \qquad \Phi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01> - |10>)$$

ist. Man zeige, dass ρ genau dann verschränkt isr, wenn für ein i gilt $\mu_i > (1/2)$.