Zusammenfassung der 16. Vorlesung (17.04.08)

1.4.8 *Das "Entanglement of Formation"*:

Das Entanglement of Formation, das auf bipartite Systeme beschränkt ist, knüpft direkt an die Verschränktheit der partiellen Spur

$$E(\Psi) = S(\mathrm{tr}_2|\Psi >< \Psi|) = -\sum_i c_i^2 \log_2 c_i^2,$$

wobei c_i die Schmidt Koeffizienten sind von Ψ sind, an. Es ist als das Infimum der mittleren Verschränktheit der partiellen Spur unter allen reinen Zerlegungen des gegebenen Dichteoprators ρ definiert:

$$E_f(\rho) = \inf\{\sum_i p_i E(\Psi_i)|\rho = \sum_i p_i|\Psi_i >< \Psi|\}.$$

Man folgert unmittelbar, dass die ersten zwei Forderungen, $E_f(\rho) \geq 0$, $E_f(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho \in \mathcal{D}$, und $E_f((U_1 \otimes U_2)\rho(U_1^+ \otimes U_2^+)) = E_f(\rho)$ erfüllt sind. Dass die dritte Forderung, $E_f((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho) \leq E_f(\rho)$, auch erfüllt ist, sieht man nicht unmittelbar, denn

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)|\Psi_i >< \Psi_i| &= \sum_{k,l}(A_k \otimes B_l)|\Psi_i >< \Psi_i|(A_k^+ \otimes B_l^+) \\ &= \sum_{k,l} q_{k,l}^{(i)}|\Phi_{k,l}^{(i)} >< \Phi_{k,l}^{(i)}|,\end{aligned}$$

wobei $\sum_k A_k^+ A_k = \mathbf{1}$, $\sum_k B_k^+ B_k = \mathbf{1}$ und

$$q_{k,l}^{(i)} = \|(A_k \otimes B_l)|\Psi_i > \|^2, \quad |\Phi_{k,l}^{(i)} >= \frac{1}{\|(A_k \otimes B_l)|\Psi_i > \|}(A_k \otimes B_l)|\Psi_i >$$

sind, ist kein reiner Zusand. Es gilt jedoch das Nielsensche Theorem:

Satz (Nielsen): Eine Operation $\mathcal{J}$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{J}|\psi >< \psi| = \sum_j q_j|\varphi_j >< \varphi_j|$$

existiert genau dann, wenn

$$E(\psi) \geq \sum_j q_j E(\varphi_j).$$

Wir werden dieses Theorem später beweisen. Hier folgern wir daraus, dass für jede reine Zerlegung von ρ

$$(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho = (\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2) \sum_i p_i |\Psi_i >< \Psi_i| = \sum_i p_i \sum_{k,l} q_{k,l}^{(i)} |\Phi_{k,l}^{(i)} >< \Phi_{k,l}^{(i)}|$$

eine reine Zerlegung von $(\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho$ ist, für die

$$\sum_i p_i E(\Psi_i) \geq \sum_i p_i \sum_{k,l} q_{k,l}^{(i)} E(\Phi_{k,l}^{(i)})$$

gilt. Daraus folgt aber $E_f(\rho) \geq E_f((\mathcal{J}_1 \otimes \mathcal{J}_2)\rho)$, so dass die dritte Forderung auch erfüllt wird.

Die reinen Zerlegungen eines Zustandsgemisches werden durch das folgende Theorem charakterisiert:

Satz: (a) Sei $\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i >< \psi_i|$ eine Zerlegung in (nicht notwendig orthogonale) reine Zustände, $\|\psi_i\| = 1$. Sind dann $u_{ik} \in \mathbf{C}$, $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m \geq n)$ mit

$$\sum_k \overline{u}_{ik} u_{jk} = \delta_{ij}, \quad \text{und ist} \quad \sqrt{q_k}\varphi_k := \sum_i u_{ik}\sqrt{p_i}\psi_i, \quad \|\varphi_i\| = 1,$$

dann gilt

$$\sum_k q_k |\varphi_k >< \varphi_k| = \sum_{kij} u_{ik}\overline{u}_{jk}\sqrt{p_i p_j}|\psi_i >< \psi_j| = \sum_i p_i |\psi_i >< \psi_i| = \rho.$$

(b) Ist umgekehrt $\rho = \sum_{i=1}^n p_i |\psi_i >< \psi_i| = \sum_k^m q_k |\varphi_k >< \varphi_k|$ und (o.B.d.A.) $m \geq n$, dann existieren Zahlen $u_{ik} \in \mathbf{C}$, $(i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m)$ mit

$$\sum_k \overline{u}_{ik} u_{jk} = \delta_{ij}, \quad \text{und} \quad \sqrt{q_k}\varphi_k = \sum_i u_{ik}\sqrt{p_i}\psi_i.$$

Der Beweis dieses Satzes wurde als Aufgabe 16 im Übungsblatt 6 gestellt.

Für bipartite Zustände von Qubits lässt sich die Brerechnung des Entanglement of Formation auf die Bestimmung der Eigenwerte einer hermiteschen (4×4)-Matrix zurückführen (Wootters-Formel), wie im Folgenden gezeigt wird.