

2. Übungsblatt zur Theoretischen Physik IIIa

Abgabe: Mittwoch 7.05.08 vor der Vorlesung

Klausurtermin: 8. Juli 2008 zur Vorlesungszeit

Kommutatoren und Impulsdarstellung

Aufgabe 4(14 Punkte): Kommutatoren

Zeigen Sie folgende Rechenregeln für Kommutatoren:

1. $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C} + \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}]$
2. $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$

wobei \hat{A} , \hat{B} und \hat{C} Operatoren bezeichnen.

Zeigen Sie durch Berechnen entsprechender Kommutatoren, dass folgende Gleichungen gelten:

3. $[\hat{p}_{x_i}, f(x_j)] = \frac{\hbar}{i} \frac{df(x_j)}{dx_i}$
4. $[\hat{H}, \hat{p}] = -\frac{\hbar}{i} \nabla U(\hat{r}),$

wobei $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + U(\hat{r})$, \hat{r} und \hat{p} den Hamilton-, Orts- bzw. Impulsoperator bezeichnen.

Aufgabe 5(26 Punkte): Impulsdarstellung

1. Stellen Sie die eindimensionale Schrödinger-Gleichung (mit einem Potenzial $U(x)$) in Impulsdarstellung $\phi(q, t)$ auf.

Hinweis: Verwenden Sie die aus der Vorlesung und Übung bekannte Fourier-Transformation von $\psi(x, t)$ und benutzen Sie partielle Integration.

2. Wie lautet die zugehörige stationäre Schrödinger-Gleichung?
3. Betrachten Sie nun die stationäre Schrödinger-Gleichung mit dem Potenzial $U(x) = -U_0\delta(x)$ mit $U_0 > 0$. Bestimmen Sie die Energie $E < 0$ des gebundenen Zustands und die zugehörige Wellenfunktion $\varphi(p)$.

Hinweis: Es sind folgende Integralausdrücke zur Berechnung der Energie und der Normierungskonstanten von $\varphi(p)$ hilfreich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q^2+a^2} dq = \frac{1}{a} \arctan \frac{q}{a} \text{ mit } a > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(q^2+a^2)^2} dq = \frac{q}{4a^2(q^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{q}{a} \text{ mit } a > 0.$$