

2. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 04.05.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!

Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 4 (13 Punkte): Potential-Streuung

Wir betrachten ein stückweise stetiges Potential $V(x)$ und die Lösungen der SG in den jeweiligen Intervallen,

$$V(x) = \begin{cases} V_1, \\ V_2, \\ \dots \\ V_N \\ V_{N+1} \end{cases} \quad \dots \quad \psi(x) = \begin{cases} a_1 e^{ik_1 x} + b_1 e^{-ik_1 x}, & -\infty < x \leq x_1 \\ a_2 e^{ik_2 x} + b_2 e^{-ik_2 x}, & x_1 < x \leq x_2 \\ \dots & \dots \\ a_N e^{ik_N x} + b_N e^{-ik_N x}, & x_{N-1} < x \leq x_N \\ a_{N+1} e^{ik_{N+1} x} + b_{N+1} e^{-ik_{N+1} x}, & x_N < x < \infty \end{cases},$$

wobei

$$k_j = \sqrt{(2m/\hbar^2)(E - V_j)}.$$

Wir betrachten den Fall $E > V_1, V_{N+1}$, so dass k_1 und k_{N+1} reelle Wellenvektoren sind und $\psi(x)$ laufende, ebene Wellen außerhalb des Streugebiets $[x_1, x_N]$ beschreiben.

Wir wollen nun Lösungen der SG unter der **Streubedingung** $b_{N+1} = 0$ bestimmen, d.h. wir suchen Lösungen, die auf der rechten Seite des Streugebiets nach rechts laufen, aber keinen Anteil aufweisen, der von rechts einläuft.

1. Benutzen Sie die Stetigkeit von $\psi(x)$ und seiner Ableitung $\psi'(x)$ und zeigen Sie, dass sich zwei Gleichungen ergeben, die sich in der Matrix-Form

$$\mathbf{u}_1 = T^1 \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

mit

$$T^1 = \frac{1}{2k_1} \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)e^{i(k_2 - k_1)x_1} & (k_1 - k_2)e^{-i(k_1 + k_2)x_1} \\ (k_1 - k_2)e^{i(k_2 + k_1)x_1} & (k_1 + k_2)e^{-i(k_2 - k_1)x_1} \end{pmatrix}$$

schreiben lassen.

2. Zeigen Sie, dass sich die Wellenfunktion auf der linken Seite mit der auf der rechten Seite des Streugebiets mit Hilfe der **Transfer-Matrix** M verbinden läßt, wobei

$$\mathbf{u}_1 = M \mathbf{u}_{N+1}, \quad M = T^1 T^2 \dots T^N$$

und die T^i sowie \mathbf{u}_{N+1} analog zu oben zu definieren sind.

3. Benutzen Sie die Kontinuitätsgleichung und die Stromdichte (siehe Aufgabe 6) und zeigen Sie

$$j(x > x_N) = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(ik_{N+1}|a_{N+1}|^2) = |a_{N+1}|^2 \frac{\hbar k_{N+1}}{m}$$

$$j(x < x_1) = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[(a_1^* e^{-ik_1 x} + b_1^* e^{ik_1 x}) i k_1 (a_1 e^{ik_1 x} - b_1 e^{-ik_1 x}) \right] = \frac{\hbar k_1}{m} [|a_1|^2 - |b_1|^2].$$

Die Stromdichte $j(x > x_N)$ beschreibt eine Fluß rechts vom Streugebiet nach $x \rightarrow \infty$. Auf der anderen Seite ist $j(x < x_1)$ auf der linken Seite die Differenz eines einfließenden, positiven Stroms (einfallende Teilchen) und eines ausfließenden, negativen Stroms (reflektierte Teilchen).

4. Der **Transmissions-Koeffizient** T und der **Reflexions-Koeffiziente** R sind definiert als das Verhältnis vom Strom der transmittierten bzw. reflektierten Welle zum Strom der einfließenden Welle

$$T := \frac{k_{N+1}}{k_1} \left| \frac{a_{N+1}}{a_1} \right|^2, \quad R := \left| \frac{b_1}{a_1} \right|^2.$$

Zeigen Sie damit, dass

$$T = \frac{k_{N+1}}{k_1} \frac{1}{|M_{11}|^2}, \quad R = \left| \frac{M_{21}}{M_{11}} \right|^2$$

und $T + R = 1$

gilt, wobei M_{ij} die Einträge der Transfer-Matrix M sind.

Aufgabe 5 (12 Punkte): Streuung an Rechteck-Barriere

Wir untersuchen die Streuung eines quantenmechanischen Teilchens mit Masse m und Energie E an einer Rechteck-Barriere der Höhe $V > 0$ und Breite $2a$, indem wir den soeben hergeleiteten Transfermatrix-Formalismus mit

$$N = 2, \quad x_1 = -a, \quad x_2 = a, \quad V_1 = 0, \quad V_2 = V, \quad V_3 = 0$$

verwenden.

1. Zeigen Sie, dass für das obere linke Element der durch $M = T_1 T_2$ gegebenen Transfermatrix

$$M_{11} = e^{2ik_1 a} \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} i \sin(-2k_2 a) + \cos(2k_2 a) \right]$$

gilt und berechnen Sie anschließend das Betragsquadrat $|M_{11}|^2$.

2. Bestimmen Sie nun den Transmissionskoeffizienten T für die drei Fälle $E < V$, $E = V$ und $E > V$ und skizzieren Sie ihn als Funktion der Energie E .
3. Vergleichen Sie das erhaltene quantenmechanische Resultat mit dem der klassischen Mechanik.

Aufgabe 6 (5 Punkte): Kontinuitätsgleichung

Leiten Sie aus der Schrödinger-Gleichung die dreidimensionale Version der Kontinuitätsgleichung für die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ her:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Nabla-Kalküls, dass die Wahrscheinlichkeits-Stromdichte durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\Psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{x}, t)]$$

gegeben ist.