

**5. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009**

**Abgabe: Mo. 25.05.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!

Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

**Aufgabe 12 (10 Punkte): Grundzustand des harmonischen Oszillators**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der eindimensionale harmonische Oszillator mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren  $a^\dagger$  und  $a$  ausgedrückt werden kann:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \hat{p}.$$

Berechnen Sie die Wellenfunktion des Grundzustands im Ortsraum,  $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ , indem Sie die Gleichung  $a|0\rangle = 0$  ausnutzen.

**Aufgabe 13 (10 Punkte): Kohärente Zustände**

Der kohärente Zustand  $|z\rangle$  ist definiert durch (Skript 2.6.3)

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

1. Berechnen Sie für den 1d harmonischen Oszillator die Zeitentwicklung  $|\Psi(t > 0)\rangle$  eines kohärenten Zustandes  $|\Psi(t = 0)\rangle = |z\rangle$  für ein gegebenes komplexes  $z$ . Skizzieren Sie die Zeitentwicklung in der komplexen Ebene.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(n)$ , im kohärenten Zustand  $|\Psi(t)\rangle$  eine Anzahl von  $n$  Energie-Quanten (Photonen, Phononen) zu finden.

**Aufgabe 14 (10 Punkte): Elektron im Magnetfeld.**

In Analogie zur klassischen Elektrodynamik definieren wir nun den Hamiltonoperator eines Teilchens mit Ladung  $e$  und Masse  $m^*$  als

$$(1) \quad H = \frac{1}{2m^*} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2.$$

1. Zeigen Sie, dass er sich in folgender Form schreiben lässt ( $\hbar = 1$ ):

$$(2) \quad H = \frac{1}{2m^*l^2} (\beta^\dagger \beta + \alpha^\dagger \alpha - sL_z), \quad L_z := xp_y - yp_x,$$

wobei

$$(3) \quad \begin{aligned} \alpha &:= \frac{1}{2l}(x + isy), & \alpha^\dagger &:= \frac{1}{2l}(x - isy) \\ \beta &:= l(ip_x - sp_y), & \beta^\dagger &:= l(-ip_x - sp_y) \\ s &:= \text{sign}(eB), & l &:= \sqrt{\frac{c}{|eB|}}. \end{aligned}$$

Die Länge  $l$  wird als magnetische Länge bezeichnet.

2. Prüfen Sie nach, dass für die  $z$ -Komponente des Drehimpulses  $L_z$  aus Gl. 2 gilt

$$L_z = -s(\alpha^\dagger\beta + \alpha\beta^\dagger).$$

3. Berechnen Sie den Kommutator  $[\beta^\dagger, \alpha]$ .

4. Zeigen Sie mit 2. und 3., dass sich der Hamiltonoperator  $H$  schreiben lässt als

$$(4) \quad H = \omega_c \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^\dagger + \beta^\dagger) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \right), \quad \omega_c := \frac{|eB|}{m^*c}.$$

5. Definieren Sie

$$(5) \quad a := \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta), \quad a^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^\dagger + \beta^\dagger)$$

und zeigen Sie

- (a)  $[a, a^\dagger] = 1$ , d.h.  $a$  ist Absteigeoperator eines harmonischen Oszillators und  
(b)  $H = \omega_c (a^\dagger a + \frac{1}{2})$ , d.h. der Hamiltonoperator lässt sich auf den eines harmonischen Oszillators mit Leiteroperatoren  $a$  und  $a^\dagger$  zurückführen.