

6. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Di. 02.06.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!

Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 15 (15 Punkte): Eichtransformationen in der Wellenmechanik

Wir wollen in dieser Aufgabe die allgemeine Form des Hamiltonoperators \hat{H} in der Schrödingergleichung aus dem freien Hamiltonian $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ und dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz herleiten. Demzufolge sollen lokale Eichtransformationen der Wellenfunktion

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t) := e^{i\varphi(\mathbf{x}, t)} \Psi(\mathbf{x}, t)$$

mit einer beliebigen Funktion $\varphi(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ nichts an der Physik ändern: Wenn also $\Psi(\mathbf{x}, t)$ Lösung einer zeitabhängigen Schrödingergleichung SG ist, so fordern wir, dass auch $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ eine äquivalente Lösung einer äquivalenten zeitabhängigen Schrödingergleichung $\tilde{S}\tilde{G}$ ist.

1. Zeigen Sie, dass durch Verallgemeinerung der Ableitungen ∇ und $\frac{\partial}{\partial t}$ zu kovarianten Ableitungen

$$\nabla \rightarrow \mathbf{D}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow D_0 \quad (\text{SG}), \quad \nabla \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \tilde{D}_0 \quad (\tilde{S}\tilde{G})$$

das Prinzip der lokalen Eichinvarianz erfüllt werden kann. Machen Sie hierzu den Ansatz

$$\tilde{\mathbf{D}} = \nabla + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{D}_0 = \frac{\partial}{\partial t} + g(\mathbf{x}, t)$$

mit den Eichfeldern $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ und $g(\mathbf{x}, t)$ und berechnen Sie damit, wie sich die Eichfelder transformieren müssen, wenn man

$$\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\Psi} = e^{i\varphi(\mathbf{x}, t)}\mathbf{D}\Psi, \quad \tilde{D}_0\tilde{\Psi} = e^{i\varphi(\mathbf{x}, t)}D_0\Psi$$

fordert.

2. Ersetzen Sie nun in der ursprünglich freien SG, $i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$, die Ableitungen durch die entsprechenden kovarianten Ableitungen. Schreiben Sie die neugewonnene SG sowie $\tilde{S}\tilde{G}$ auf und identifizieren Sie anschließend die Eichfelder $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ und $g(\mathbf{x}, t)$ durch Umbenennung als Vektorpotential \mathbf{A} bzw. skalares Potential Φ der Elektrodynamik.

Aufgabe 16 (15 Punkte): Elektron im Magnetfeld.

Consider the two-dimensional Hamiltonian of a charged particle in a magnetic field (see the task no. 14)

$$(1) \quad H = \frac{1}{2m^*l^2}(\beta^\dagger\beta + \alpha^\dagger\alpha - sL_z), \quad L_z := xp_y - yp_x,$$

where

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha &:= \frac{1}{2l}(x + isy), & \alpha^\dagger &:= \frac{1}{2l}(x - isy) \\ \beta &:= l(ip_x - sp_y), & \beta^\dagger &:= l(-ip_x - sp_y) \\ s &:= \text{sign}(eB), & l &:= \sqrt{\frac{c}{|eB|}}. \end{aligned}$$

1. Prove that H and L_z commute.

2. Show that

$$H|n, m\rangle = \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) |n, m\rangle, \quad L_z|n, m\rangle = sm|n, m\rangle,$$

where n is the eigenvalue of $a^\dagger a$ and $n + m$ is the eigenvalue of $b^\dagger b$ which are defined as follows:

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta), & a^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^\dagger + \beta^\dagger) \\ b &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta), & b^\dagger &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^\dagger - \beta^\dagger) \end{aligned}$$

3. Which values n can assume, and which values are possible for m for a given n ?

4. Set the magnetic length to one, $l = 1$, and express the operators a and b through x , y , ∂_x and ∂_y . Define a complex variable $z := x + isy$ and the following derivatives:

$$\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_x - is\partial_y), \quad \partial_{z^*} := \frac{1}{2}(\partial_x + is\partial_y).$$

With its help demonstrate that

$$a^\dagger = \sqrt{2} \left(-\partial_z + \frac{z^*}{4} \right), \quad b^\dagger = \sqrt{2} \left(-\partial_{z^*} + \frac{z}{4} \right).$$

5. Since a^\dagger and b^\dagger are creation operators, the same relation is valid as for the harmonic oscillator

$$|n, m\rangle = \frac{1}{[n!(n+m)!]^{1/2}} (a^\dagger)^n (b^\dagger)^{n+m} |00\rangle.$$

Write down two equations $a|00\rangle = 0$ and $b|00\rangle = 0$ in coordinate representation (i.e. two differential equations for the wave function of the ground state $\langle xy|00\rangle := \phi_{00}(x, y)$) and show that

$$\phi_{00}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}.$$

6. By using the previous result show that the wave function of the lowest Landau level ($n = 0$) for $m > 0$ can be written down as:

$$\langle xy|0m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{m+1}\pi m!}} z^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2}.$$

Bonus: Compute the expectation value of $\langle r^2 \rangle_m \equiv \langle 0m|r^2|0m\rangle$. For the finite area A available to the two-dimensional system it is reasonable to assume $\pi \langle r^2 \rangle_m \leq A$. Show that this then limits m from above by N_s

$$m \leq N_s - 1, \quad N_s = \frac{A}{2\pi l^2}, \quad l \equiv \sqrt{c/|eB|}.$$