

7. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 8.6.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!

Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 17 (10 Punkte): Wasserstoffatom

Die normierte Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms ist gegeben durch

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{a_0^{-3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp(-r/a_0).$$

1. Berechnen Sie den mittleren Abstand des Elektrons vom Kern.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron innerhalb des Kerns zu finden (Kernradius ca. 10^{-15}m)?
3. Plotten Sie nun die radiale Aufenthalts-Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r) = \int d\Omega r^2 |\Psi_{n,l,m}(r)|^2$ für
 - die Zustände $l = 0$ mit $n = 1, 2, 3, 4$,
 - die Zustände $n = 4$ mit $l = 0, 1, 2, 3$.

Verwenden Sie als Längenskala den Bohrschen Radius $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/me^2$. (Beachten Sie, dass die Laguerre-Polynome in Mathematica nicht die übliche Normierung haben.)

4. Visualisieren Sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ mit Hilfe des Kommandos `SphericalPlot3D` von Mathematica für $l = 1$ mit $m = -1, 0, 1$ sowie für $l = 2$ mit $m = 0, 1, 2$. Was wird dabei dargestellt?

Bonus: Ein Elektron im Coulombfeld eines Protons habe die Wellenfunktion

$$\Phi = \left(\frac{a_0}{\sqrt{\pi}}\right)^{-3/2} e^{-a_0^2 r^2/2}.$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet es sich im Grundzustand Ψ_{100} des Wasserstoffatoms?

Aufgabe 18 (10 Punkte): Angular momentum

Let $\hat{\mathbf{J}}$ to be an angular momentum with the following commutation rules for its components:

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ikl}J_l.$$

1. Check that $[\hat{\mathbf{J}}^2, J_i] = 0$ for $i = 1, 2, 3$, where $\hat{\mathbf{J}}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$. This means that $\hat{\mathbf{J}}^2$ and e.g. J_3 have the same eigenvectors:

$$\hat{\mathbf{J}}^2|\lambda\nu\rangle = \lambda|\lambda\nu\rangle, \quad J_3|\lambda\nu\rangle = m_\nu|\lambda\nu\rangle.$$

2. Define $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$, for which we have $[J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}$. Prove the following relations:

$$J_+ J_- |\lambda\nu\rangle = (\lambda - m_{\nu}^2 + m_{\nu}) |\lambda\nu\rangle$$

$$J_3 J_+ |\lambda\nu\rangle = (m_{\nu} + 1) J_+ |\lambda\nu\rangle$$

3. Denote by j the maximal value of m_{ν} for a given λ . Prove that $\lambda = j(j + 1)$. Show also that

$$J_{\pm} |jm\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |jm \pm 1\rangle.$$

Aufgabe 19 (10 Punkte): Spin-Messung

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu $\sigma_{\mathbf{n}}$ (gedrehte Stern-Gerlach-Apparatur Gleichung (2.323) des Skripts).

Gegeben sei nun ein System von Teilchen mit dem Spin $s = \frac{1}{2}$. An einem Teilchenstrahl (d.h. einem Ensemble von Teilchen), der im Zustand $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} (|\uparrow_z\rangle + 3|\downarrow_z\rangle)$ präpariert ist, führen wir zuerst eine S_x -Messung und dann eine S_z -Messung durch.

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die beiden möglichen Messwerte der S_x -Messung.
3. Berechnen Sie die beiden totalen und die vier bedingten Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Messwerte der darauf folgenden S_z -Messung.
4. Wie ändern sich die Ergebnisse in 2. und 3., wenn man die Reihenfolge der beiden Messungen vertauscht?

<p>Sprechstunden:</p> <ul style="list-style-type: none">• Prof. Dr. Tobias Brandes: Mo 13:00 Uhr (EW 742)• Dr. Vasily Zaburdaev: Di 10:00 Uhr (EW 708)• Dipl. Phys. Valentin Flunkert: Fr 10:00 Uhr (EW 632)• Dipl. Phys. Johannes Taktikos: Mi 16:00 Uhr (EW 701)• Malte Langhoff: Do 13:00 Uhr (EW217)• Miriam Wegert: Do 14:00 Uhr (EW217)
--