

9. Übungsblatt – Theoretische Physik II: Quantenmechanik 2009

Abgabe: Mo. 22.06.2009 bis 12:00 Uhr, Briefkasten ER-Gebäude

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Bitte das Tutorium und den Namen des Tutors auf dem Aufgabenzettel angeben, der Zettel wird sonst nicht korrigiert!

Abgabe bitte in 3er (oder 2er) Gruppen – keine Einzelabgabe.

Aufgabe 23 (10 Punkte): Spin-Drehung

In dieser Aufgabe soll untersucht werden, wie sich ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen verhält, wenn es gedreht wird. Dazu leiten wir zuerst den unitären Operator her, der den Spinzustand dreht.

1. Um welche Achse \mathbf{n}' und um welchen Winkel muss der Vektor \mathbf{e}_z gedreht werden, um in den Vektor $\mathbf{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ überführt zu werden? Machen Sie eine Skizze.
2. Sei $U_{\mathbf{n}'}(\theta)$ der Operator, der die Stern-Gerlach-Apparatur entlang des Vektors \mathbf{n} ausrichtet. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenwertgleichung von S_z durch Drehung zu

$$U_{\mathbf{n}'}(\theta) S_z U_{\mathbf{n}'}^\dagger(\theta) = \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

wird.

Zeigen Sie, dass der Operator

$$U_{\mathbf{n}'}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}(\mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\sigma})\right)$$

die Gleichung löst.

3. Zeigen Sie, dass

$$U_{\mathbf{n}'}(2\pi) = -\mathbf{1}.$$

4. Berechnen Sie die Erwartungswerte von S_x , S_y und S_z für den Zustand $|\psi_\theta\rangle = U_{\mathbf{e}_x}(\theta)|\uparrow_z\rangle$

Bonus: Überlegen Sie, wie man mit einem Doppelspaltexperiment das Ergebnis aus 3. überprüfen könnte.

Aufgabe 24 (10 Punkte): Scattering on a delta potential

Consider a problem of scattering on a delta potential of the form $V(x) = \alpha\delta(x)$, $\alpha \geq 0$.

1. Find the transmission and reflection coefficients $T(k)$ and $R(k)$ as a function of the wave vector k .
2. Take the formula (1.135) from the script for the transmission coefficient of a potential step. Consider the limit of infinite barrier height $U \rightarrow \infty$ and infinitely small width $2a \rightarrow 0$ in such a way that $2aU \rightarrow \alpha$. Compare this limiting case with the previous results for a delta barrier.

Aufgabe 25 (10 Punkte): Pauli-Matrizen

Der Spin-Operator $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ des Elektrons erfüllt per Definition die Drehimpulsalgebra $[S_j, S_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}S_l$. Ein Zustand werde durch $|s, s_z\rangle$ dargestellt ($s = 1/2$ und $s_z = \pm 1/2$) und genügt den Eigenwertgleichungen $\mathbf{S}^2|s, s_z\rangle = \hbar^2 s(s+1)|s, s_z\rangle$ und $S_z|s, s_z\rangle = \hbar s_z|s, s_z\rangle$.

1. Wir geben die Spin-Operatoren in der konventionellen $\{S_z\}$ -Darstellung an, in der S_z diagonal ist:

$$S_z = \begin{pmatrix} +\hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie nun Ausdrücke für die Operatoren S_x und S_y her, indem Sie das Ergebnis von Aufgabe 18 nutzen. Bestimmen Sie dazu zunächst die Matrixelemente der Operatoren $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$ und verwenden Sie die Gleichung

$$S_{\pm}|s, s_z\rangle = \hbar\sqrt{(s \mp s_z)(s \pm s_z + 1)} |s, s_z \pm 1\rangle.$$

Mit der Definition der Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$

$$\sigma_x \equiv \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

lässt sich das Ergebnis kompakt als $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ schreiben.

2. Zeigen Sie die folgende Eigenschaft der Pauli-Matrizen durch explizites Nachrechnen:

$$\sigma_j\sigma_k = i\epsilon_{jkl}\sigma_l + \delta_{jk}\mathbb{1}.$$

Beweisen Sie, dass daraus für den Kommutator $[\sigma_j, \sigma_k]$ bzw. den Antikommutator $\{\sigma_j, \sigma_k\} \equiv \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j$ folgt:

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l, \quad \{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbb{1}.$$

Im zweiten Teil dieser Aufgabe betrachten wir ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einem rotierenden Magnetfeld $\mathbf{B}(t)$, das durch $B_x(t) = B_1 \cos(\omega t)$, $B_y(t) = B_1 \sin(\omega t)$, $B_z(t) = B_0 = \text{const.}$ beschrieben wird. Der zeitabhängige Hamilton-Operator $\mathcal{H}(t)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{H}(t) = \mathbf{B}(t) \boldsymbol{\sigma} = B_x(t)\sigma_x + B_y(t)\sigma_y + B_z(t)\sigma_z.$$

3. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}(t)$ mit $B_{\parallel}(t) \equiv B_x(t) + iB_y(t)$ geschrieben werden kann als

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} B_z(t) & B_{\parallel}^*(t) \\ B_{\parallel}(t) & -B_z(t) \end{pmatrix}.$$

4. Leiten Sie aus der Schrödinger-Gleichung $i\partial_t|\Psi(t)\rangle = \mathcal{H}(t)|\Psi(t)\rangle$ ($\hbar = 1$) für den zweikomponentigen Spinor $|\Psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$ die nachfolgenden Differentialgleichungen her:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= \frac{1}{B_{\parallel}} \left(i\dot{\psi}_2(t) + B_z\psi_2(t) \right), \\ \ddot{\psi}_2(t) &= i\omega\dot{\psi}_2(t) - (B_0^2 + |B_1|^2 - \omega B_0) \psi_2(t). \end{aligned}$$

5. Definieren Sie als *Rabi-Frequenz* $\Omega_R \equiv \sqrt{(\omega - 2B_0)^2 + 4|B_1|^2}$ und geben Sie die Lösung für $\psi_2(t)$ mit der Anfangsbedingung $\psi_2(0) = 1$ an. Zeigen Sie, dass für $|\psi_2(t)|^2$ gilt:

$$|\psi_2(t)|^2 = \frac{(\omega - 2B_0)^2}{\Omega_R^2} + 4 \frac{|B_1|^2}{\Omega_R^2} \cos^2 \left(\frac{\Omega_R}{2} t \right).$$