Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
Dr. T. Chrobok
A. Carmele

3. Juni 2010

8. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

Abgabe: Donnerstag, 17.06.2010 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Die Symmetrien des Krümmungstensors*

Aus den Christoffelsymbolen und deren partiellen Ableitungen wird der Riemannsche Krümmungstensor definiert durch

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} = 0.$$

Benutzen Sie dabei die Symmetrie der Christoffelsymbole.
b) Zeigen Sie die Antisymmetrie im hinteren Indexpaar.
c) Zeigen Sie durch Wahl einer geeigneten Darstellung des Krümmungstensors die Symmetrie $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Bianchi Identitäten*

Zusätzlich zu den oben beschriebenen algebraischen Identitäten des Krümmungstensors (1) existiert im Riemannschen Raum die Differentialidentität

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\sigma]} = 0 \tag{2}$$

für den Krümmungstensor, die sogenannte Bianchi Identität.
a) Zeigen Sie, dass Gleichung (2) gilt. Falls Sie lokal geodätische Koordinaten benutzen, diskutieren Sie die Allgemeingültigkeit ihres Ergebnisses.
b) Leiten Sie aus Gleichung (2) die sogenannte kontrahierte Bianchi Identität

$$(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0$$

ab. Hier bezeichnen $R_{\alpha\beta} := g^{\gamma\delta}\ R_{\gamma\alpha\delta\beta} = R^{\delta}{}_{\alpha\delta\beta}$ den Ricci-Tensor und $R := R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = R^{\alpha}{}_{\alpha}$ den Ricci-Skalar.