Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

Prof. Dr. H. Stark,
Andreas Zöttl

25. Mai 2010

7. Übungsblatt – Biologische Physik SS10

Abgabe: Di. 01.06.2010 im Tutorium

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe (17): *mündlich: Spontane und angetriebene Permeation*

Eine Membran lässt nicht nur die gelößten Stoffe passieren, sondern auch das Lösungsmittel selbst. In dieser Aufgabe wollen wir den Transport von Wasser durch eine Membran betrachten.

(a) Die *Permeationskonstante* für Wasser lässt sich messen, indem auf der einen Seite der Membran das Wasser durch schweres Wasser HTO vollständig ersetzt wird. Dieses ist chemisch identisch mit H_2O, aber radioaktiv. Der Fluss von schwerem Wasser durch die Membran führt zu einer messbaren Radioaktivität auf der anderen Seite der Membran. Experimentell ergibt sich für den Teilchenstrom radioaktiver Wassermoleküle ein Wert von 3,8 mol/(s m^2). Formuliere für den diffusiven Teilchenstrom j des Wassers eine Relation von der Art des 1. Fick'schen Gesetzes. Bestimme den darin auftretenden Koeffizienten, die sog. Permeationskonstante $\mathcal{P}_\mathrm{W}$ für Wasser. (Die Konzentration von Wasser ist 55 mol/l.)

(b) Auf beiden Seiten der Membran befinde sich nun normales Wasser, H_2O, wobei wir die Flüssigkeit mit einer Druckdifferenz Δp durch die Membran hindurchpressen. Der daraus resultierende *Volumen*fluss von Wasser durch die Membran wird proportional zu dieser mechanischen Antriebskraft sein: $j_\mathrm{Vol} = \mathcal{L}_\mathrm{W}\Delta p$. Die Konstante $\mathcal{L}_\mathrm{W}$ ist der sog. *Filtrationskoeffizent* der Membran für Wasser.
Es besteht eine Beziehung zwischen $\mathcal{L}_\mathrm{W}$ und $\mathcal{P}_\mathrm{W}$. Formuliere hierfür eine einfache Abschätzung von der Art der Einstein-Relation durch Vergleich mit dem 1. Fick'schen Gesetz mit Driftterm. (Welche Rolle spielen $\mathcal{P}_\mathrm{W}$ und $\mathcal{L}_\mathrm{W}$? Stimmen die Dimensionen?). Welcher Wert ergibt sich damit für $\mathcal{L}_\mathrm{W}$? Wie groß ist der Volumenfluss von Wasser bei einer Druckdifferenz von 1 atm?

Aufgabe 19 (10 Punkte): *schriftlich: Mikrokanonische und kanonische Verteilung*
Nach der Informationstheorie von Shannon lässt sich die Entropie eines Systems definieren als

$$S = -k \sum_i p_i \ln p_i \,,$$

wobei die Wahrscheinlichkeiten p_i der Mikrozustände des Systems so gewählt sind, dass die Entropie maximal wird.

(a) Mikrokanonisches Ensemble
Maximiere die Entropie unter Berücksichtigung der Normierung der Wahrscheinlichkeiten:

$$\sum_i p_i \stackrel{!}{=} 1 \,.$$

Verwende hierzu die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i ergibt sich daraus? Wie lautet die maximierte Entropie?

(b) Kanonisches Ensemble
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i der Energiezustände E_i eines Systems bei einer festen Temperatur $\beta = 1/kT$. Zusätzlich zur Normierung muss die Makro-Nebenbedingung

$$\langle E \rangle \equiv \sum_i p_i E_i \stackrel{!}{=} U \quad \text{(innere Energie)}$$

erfüllt sein. Verwende zur Maximierung der Entropie unter Berücksichtigung beider Nebenbedingungen wieder die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Welche Beziehung ergibt sich damit für die maximierte Entropie?

Einer der Lagrange-Multiplikatoren bleibt dabei noch unbestimmt. Diesem können wir eine physikalische Bedeutung zuordnen, wenn wir die informationstheoretisch definierte Entropie mit der thermodynamischen Entropie $S(U)$ identifizieren. Die Temperatur des Systems ist dann gegeben durch

$$k\beta = \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \; .$$

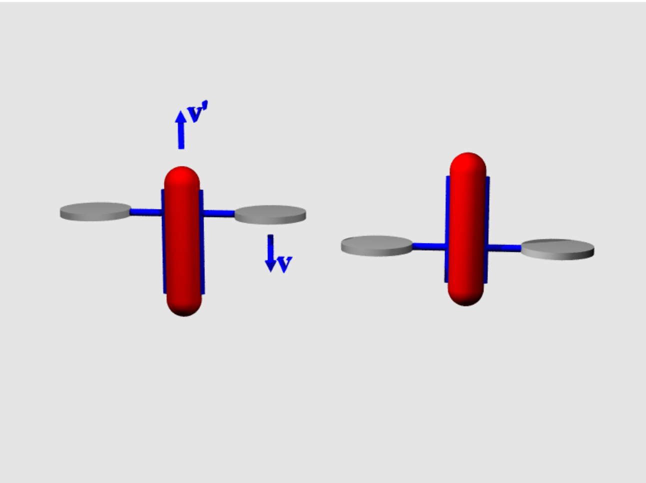
Was ergibt sich damit letztlich für die Verteilung p_i? Welche Beziehung erhält man für die freie Energie F?

Aufgabe (20): *mündlich: Schwimmen bei kleinen Reynoldszahlen*

Wir betrachten einen stark vereinfachten Modellschwimmer, der eine Art Paddel relativ zu seinem Körper bewegt. Um die Rechnung zu vereinfachen nehmen wir an, dass sich der Körper und das Paddel nur in einer Dimension bewegen. Für den Fall kleiner Reynoldszahlen sind die auftretenden Geschwindigkeiten und Kräfte durch

$$F = \gamma v$$

mit den für Körper und Paddel unterschiedlichen Reibungskonstanten γ_K und γ_P bestimmt. Zum Schwimmen werden die Paddel relativ zum Körper mit einer Geschwindigkeit v_1 die Strecke s_0 bewegt (erster Schwimmzug). Anschließend werden sie mit einer kleineren Geschwindigkeit v_2 in ihre Ausgangsposition bewegt (zweiter Schwimmzug).



(a) Bestimme die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper beim ersten Schwimmzug bewegt. Wie weit kommt er?

(b) Wiederhole (a) für den zweiten Schwimmzug und bestimme v_1 und v_2 so, dass sich der Schwimmer nach dem kompletten Schwimmzyklus möglichst weit bewegt hat.

(c) Diskutiere Möglichkeiten, die Effizienz des Schwimmers zu verbessern.

Vorlesung:	• Montag 10:15 Uhr – 12:00 Uhr im EW 203 • Dienstag 14:15 Uhr – 16:00 Uhr im EW 203
Übung:	• Dienstag 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im EW 731
Scheinkriterien:	• Von den als schriftlich gekennzeichneten Aufgaben werden mindestens 50% der Übungspunkte benötigt (Zweierabgabe möglich). • Von den restlichen Aufgaben müssen 50% so bearbeitet sein, dass sie in der Übung vorgestellt werden können.
Sprechzeiten:	• Andreas Zöttl: Mittwoch 11 – 12 Uhr im EW 702

http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss10/pflichtveranstaltungen_-_master/biologische_physik/