Tutorium 6) Vektorfunktionen

24.05.2010
<u>online</u>

Wir betrachten Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (hier $n=3$)

$t \longmapsto \underline{f}(t)$ Parameterdarstellung

Parameter (kann z.B. Zeit oder Ort in 1-d sein)

Vektor $\underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \\ f_z(t) \end{pmatrix}$

- wenn nicht anders angegeben, dann wird $\underline{f}(t)$ in der Standardbasis $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ notiert, d.h.

$$\underline{f}(t) = f_x(t)\,\underline{e}_1 + f_y(t)\,\underline{e}_2 + f_z(t)\,\underline{e}_3$$

$$= f_i(t)\,\underline{e}_i \qquad \text{(Summationskonvention!)}$$

- bekannte Rechenregeln gelten weiterhin, z.B

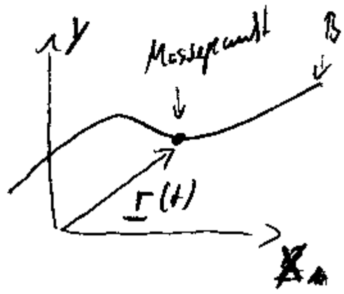
Ableitung: • $\frac{d}{dt}\underline{f}(t) = \sum_i \frac{d}{dt} f_i(t)\,\underline{e}_i \qquad i \in \{x,y,z\}$

Produktregel: • $\frac{d}{dt}\left(\underline{f}(t)\cdot\underline{g}(t)\right) = \left[\frac{d}{dt}\underline{f}(t)\right]\cdot\underline{g}(t) + \underline{f}(t)\cdot\left[\frac{d}{dt}\underline{g}(t)\right]$

• $\frac{d}{dt}\left(\underline{f}(t)\times\underline{g}(t)\right) = \frac{d}{dt}\underline{f}(t)\times\underline{g}(t) + \underline{f}(t)\times\frac{d}{dt}\underline{g}(t)$

siehe A15 - <u>Tipp</u>: $(\underline{a}\times\underline{b})_i = \varepsilon_{ijk}\,a_j\,b_k$

<u>Beispiel</u>: Bahnkurve eines Teilchens: t = Zeit



Ort: $\underline{r}(t)$

Geschwindigkeit: $\dot{\underline{r}}(t) = \frac{d}{dt}\underline{r}(t) = \sum_i \dot{r}_i(t)\,\underline{e}_i = \underline{v}(t)$

Beschleunigung: $\ddot{\underline{r}}(t) = \frac{d}{dt}\dot{\underline{r}}(t) = \sum_i \ddot{r}_i(t)\,\underline{e}_i = \underline{a}(t)$

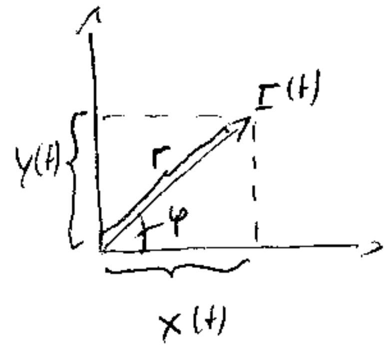
Bemerkung: für <u>Zeitableitungen</u> schreibt man oft

$$\frac{d}{dt}\underline{a}(t) = \dot{\underline{a}}(t)$$

Beispiel: $\underline{r}(t) = 2t\,\underline{e}_1 + \cos(5t)\,\underline{e}_2 + \sin(5t)\,\underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos(5t) \\ \sin(5t) \end{pmatrix}$

$$\underline{v}(t) = 2\,\underline{e}_1 - 5\sin(5t)\,\underline{e}_2 + 5\cos(5t)\,\underline{e}_3$$
$$\underline{a}(t) = \quad -25\cos(5t)\,\underline{e}_2 - 25\sin(5t)\,\underline{e}_3$$

Im Prinzip kann man jede Bahnkurve mit kartesischen Einheitsvektoren beschreiben. Das kann aber schnell unhandlich werden.
Beschreibt man Kreisbewegungen, so eignen sich Polarkoordinaten besser ($\hat{=}$ 2 Dimensionen)



Polarkoordinaten beschreiben einen Vektor durch Länge r und Winkel φ (analog zu Polardarstellung komplexer Zahlen)

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi(t) \\ r(t)\sin\varphi(t) \end{pmatrix} = r(t)\,\underline{e}_r$$

mit Einheitsvektor in Richtung von $\underline{r}$

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkungen</u>: - Wir benötigen natürlich einen weiteren Einheitsvektor

$$\underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Dieser wird aber nicht gebraucht, um die Bahnkurve aufzuschreiben.

- Achtung: Nicht verwechseln: $\underline{r}(t)$ - Vektor
  $r(t)$ - Betrag des Vektors!

- Einheitsvektoren sind hier zeitabhängig!
  Zum Beispiel gilt $\quad \dot{\underline{r}}(t) = \dot{r}(t)\,\underline{e}_r + r(t)\,\dot{\underline{e}}_r \quad$ (vgl. A16) (*)

- Wie man Einheitsvektoren bestimmt behandeln wir später bei Koordinatentransformationen (KT)

Beispiel: gegeben sei folgende Bahnkurve

$v_z = const$
t_s: Konstante

$$\underline{r}(t) = R(t)\,\underline{e}_r - v_z\,\underline{e}_z$$

$$\text{mit } R(t) = \begin{cases} 0{,}5 + 0{,}2\,(t_s - t)^2 & \text{, für } 0 \le t < t_s \\ 0{,}5 & \text{, für } t \ge t_s \end{cases}$$

- also für $t \ge t_s$ ist $R(t)$ konstant → Kreisbewegung in x-y-Ebene
  für $0 \le t \le t_s$ ist $R(t)$ zeitabhängig → Spirale in x-y-Ebene
- es gibt eine konstante Bewegung in (negative) z-Richtung mit der Geschwindigkeit v_z
- eine mögliche 3 dimensionale Erweiterung von Polarkoordinaten sind Zylinderkoordinaten mit

$$\underline{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix},\quad \underline{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix},\quad \underline{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Gesucht: Geschwindigkeit $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t)$
Beschleunigung $\ddot{\underline{r}}(t) = \underline{a}(t)$

Lösung: Weg 1) elegant
- formuliere $\underline{r}(t)$ mit Einheitsvektoren $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z$
- berechne $\dot{\underline{r}}(t) = \dot{R}(t)\,\underline{e}_r + R(t)\,\dot{\underline{e}}_r - \dot{v}_z\,\underline{e}_z - v_z\,\dot{\underline{e}}_z$

  Bemerkung: $v_z = const \Rightarrow \dot{v}_z = 0$
  $\underline{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{e}}_z = 0$
- ausdrücken des Ergebnisses in der Form $\underline{v}(t) = v_r\,\underline{e}_r + v_\varphi\,\underline{e}_\varphi + v_z\,\underline{e}_z$

Vorteil: - man sieht oft schnell in welche Richtungen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zeigen
wichtig z.B. wegen $\underline{F} = m\,\ddot{\underline{r}} = m\,\underline{a}$ (Newton)
- eignet sich sehr gut für A 16!

Weg 2) weniger elegant

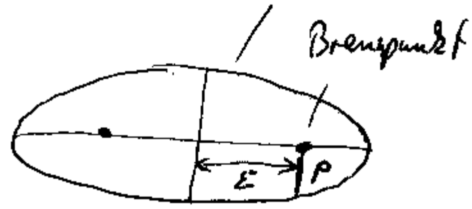
- $\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, e_z$ in Bahnkurve $\underline{r}(t)$ einsetzen und einfach ableiten

Lösung: siehe Mathematica-Anhang, nächste Seite

Tipps zu A17) Planetenbahnen

$\hat{=}$ Bewegung in einer Ebene → Polarkoordinaten Planetenbahn

Bahnen sind Ellipsen



$$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon \cos\varphi(t)}}$$

p: Halbparameter (const.)

ε: Exzentrizität $\in [0,1[$

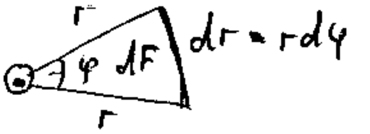
Sonne steht in einem Brennpunkt

a) zweites Keplersches Gesetz

Der Fahrstahl des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten dt gleiche Flächen dF.

mathematisch: $\frac{dF}{dt} = \text{const.} \Rightarrow dF = \text{const} \cdot dt$

- Wie groß ist dF?
  - Wenn $d\varphi$ klein ist, dann ist dF in etwa dreiecksförmig (siehe Skizze)



- berechne Flächeninhalt des Dreiecks
- verwende $2 \cdot \text{const} = \frac{L}{m}$

- Beziehung zwischen $\dot{\varphi}$ und L aufstellen:
  - finde $\frac{d\varphi}{dt} = \dots$

Viel Spaß beim Lösen

Stefan

In[1]:=
```
Off[Solve::ifun]
```

Spiralenbahn

(a) Bahnkurve

In[2]:=
```
(*Wir setzen ein paar Zahlenwerte, dann koennen wir ein paar Plots machen*)
t_min := 0;
t_s := 4;
t_max := 7;
ω_1 = 10;
v_z1 = 1.;

(*Definition der Funktion, die den Radius bestimmt*)
R[t_] = Piecewise[{{.5 + .2 (t_s - t)^2, 0 ≤ t < t_s}, {0.5,  t ≥ t_s}}]

(*erste Ableitung*)  D[R[t], t]
(*zweite Ableitung*) D[%, t]

(* Bahnkurve = r⃗ = ρ e⃗_ρ *)
Bahn[t_] := {R[t] Cos[ω t], R[t] Sin[ω t], - v_z t};

(* Ausgabe als Vaktor *) Bahn[t] // MatrixForm

ParametricPlot3D[% /. ω → ω_1 /. v_z → v_z1, {t, t_min, t_max}, AxesLabel → {"x", "y", "z"}]
```

Out[7]=

$$\begin{cases} 0.5+0.2\,(4-t)^2 & 0 \le t < 4 \\ 0.5 & t \ge 4 \end{cases}$$

Out[8]=

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ -1.6+0.4\,t & 0 < t < 4 \\ 0. & t == 4 \\ 0 & t > 4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

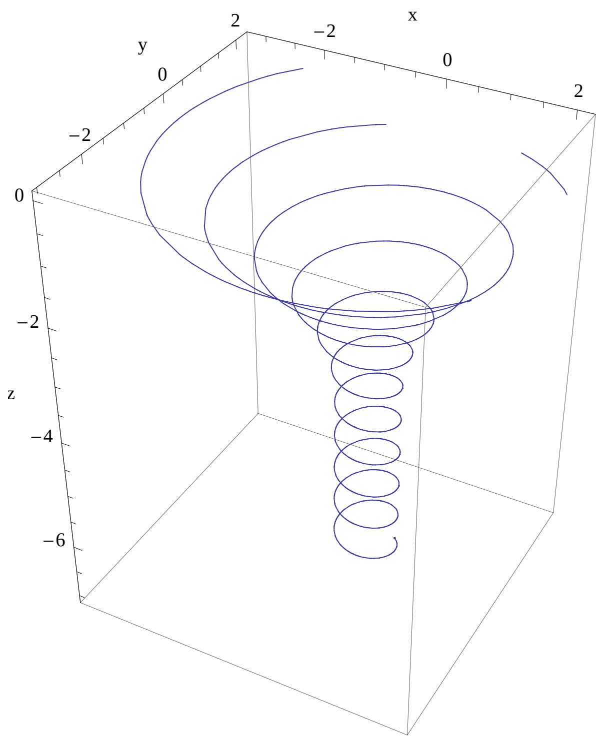
Out[9]=

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.4 & 0 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Out[11]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}[t\,\omega] \left(\begin{cases} 0.5+0.2\,(4-t)^2 & 0 \le t < 4 \\ 0.5 & t \ge 4 \end{cases} \right) \\ \begin{cases} 0.5+0.2\,(4-t)^2 & 0 \le t < 4 \\ 0.5 & t \ge 4 \end{cases} \text{Sin}[t\,\omega] \\ -t\,v_z \end{pmatrix}$$

Out[12]=



(b) Geschwindigkeit

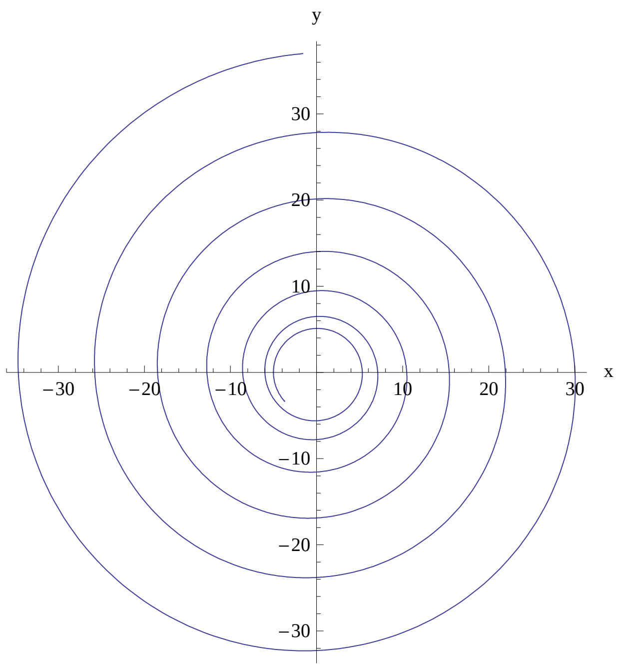
In[13]:=
```
geschwindigkeit[t_] := D[Bahn[t], t]
MatrixForm[geschwindigkeit[t]]
(* zeichne nur die x- und y- Komponente, die z-Komponente ist ja konstant

   Wir plotten der Uebersicht halber nur t < ts:
*)
ParametricPlot[{%[[1]], %[[2]]} /. ω → ω1 /. vz → vz1, {t, tmin, ts}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```

Out[14]//MatrixForm=

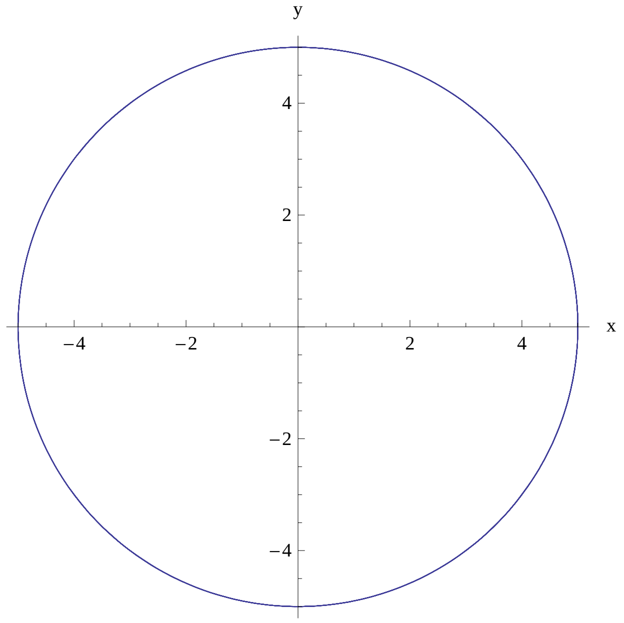
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[t\,\omega] \begin{pmatrix} \begin{cases} 0 & t<0 \\ -1.6+0.4\,t & 0<t<4 \\ 0. & t==4 \\ 0 & t>4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases} \end{pmatrix} - \omega \left(\begin{cases} 0.5+0.2\,(4-t)^2 & 0\le t<4 \\ 0.5 & t\ge 4 \end{cases} \right) \mathrm{Sin}[t\,\omega] \\ \omega\,\mathrm{Cos}[t\,\omega] \left(\begin{cases} 0.5+0.2\,(4-t)^2 & 0\le t<4 \\ 0.5 & t\ge 4 \end{cases} \right) + \begin{cases} 0 & t<0 \\ -1.6+0.4\,t & 0<t<4 \\ 0. & t==4 \\ 0 & t>4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases} \mathrm{Sin}[t\,\omega] \\ -v_z \end{pmatrix}$$

Out[15]=



In[16]:=
```
(* und jetzt noch der Plot fuer t > ts*)
geschwindigkeit[t];
ParametricPlot[{%[[1]], %[[2]]} /. ω → ω1 /. vz → vz1, {t, ts, tmax}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```

Out[17]=



Wir schreiben das nochmal einfacher auf -- zuerst fuer $t < t_s$:

In[18]:=
```
Simplify[geschwindigkeit[t], 0 < t < ts ] // MatrixForm
```

Out[18]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} (-1.6 + 0.4\, t)\, \mathrm{Cos}[t\, \omega] + \left(-3.7 + 1.6\, t - 0.2\, t^2\right) \omega\, \mathrm{Sin}[t\, \omega] \\ \left(3.7 - 1.6\, t + 0.2\, t^2\right) \omega\, \mathrm{Cos}[t\, \omega] + (-1.6 + 0.4\, t)\, \mathrm{Sin}[t\, \omega] \\ -v_z \end{pmatrix}$$

In Zylinderkoordinaten mit $\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}[\phi] \\ \mathrm{Sin}[\phi] \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\mathrm{Sin}[\phi] \\ \mathrm{Cos}[\phi] \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt mit $\phi = t\, \omega$:

$$\begin{pmatrix} (-1.6 + 0.4\, t)\, \mathrm{Cos}[t\, \omega] + \left(-3.7 + 1.6\, t - 0.2\, t^2\right) \omega\, \mathrm{Sin}[t\, \omega] \\ \left(3.7 - 1.6\, t + 0.2\, t^2\right) \omega\, \mathrm{Cos}[t\, \omega] + (-1.6 + 0.4\, t)\, \mathrm{Sin}[t\, \omega] \\ -v_z \end{pmatrix} ==$$

$$(-1.6 + 0.4\, t)\, \vec{e}_\rho + \left(3.7 - 1.6\, t + 0.2\, t^2\right) \vec{e}_\phi - v_z\, \vec{e}_z\, ;$$

Und jetzt fuer $t > t_s$:

In[19]:=
```
Simplify[geschwindigkeit[t], t > ts ] // MatrixForm
```

Out[19]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -0.5\, \omega\, \mathrm{Sin}[t\, \omega] \\ 0.5\, \omega\, \mathrm{Cos}[t\, \omega] \\ -v_z \end{pmatrix}$$

Mit den Einheitsvektoren in Zylinderkoordintaen

ausgedrueckt : $\begin{pmatrix} -0.5\, \omega\, \mathrm{Sin}[t\, \omega] \\ 0.5\, \omega\, \mathrm{Cos}[t\, \omega] \\ -v_z \end{pmatrix} == 0.5\, \omega\, \vec{e}_\phi - v_z\, \vec{e}_z$

■ (b) Beschleunigung

In[20]:=
```
beschleunigung[t_] := D[geschwindigkeit[t], t];
```

In[21]:=
```
(* x- Komponente der Beschleunigung *)
beschleunigung[t][[1]]
```

Out[21]=
$$-\omega^2 \operatorname{Cos}[t\,\omega] \left(\begin{cases} 0.5+0.2\,(4-t)^2 & 0\le t<4 \\ 0.5 & t\ge 4 \end{cases}\right) + \operatorname{Cos}[t\,\omega] \left(\begin{cases} 0 & t<0 \\ 0.4 & 0<t<4 \\ 0 & t>4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}\right) - 2\,\omega \left(\begin{cases} 0 & t<0 \\ -1.6+0.4\,t & 0<t<4 \\ 0. & t==4 \\ 0 & t>4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}\right) \operatorname{Sin}[t\,\omega]$$

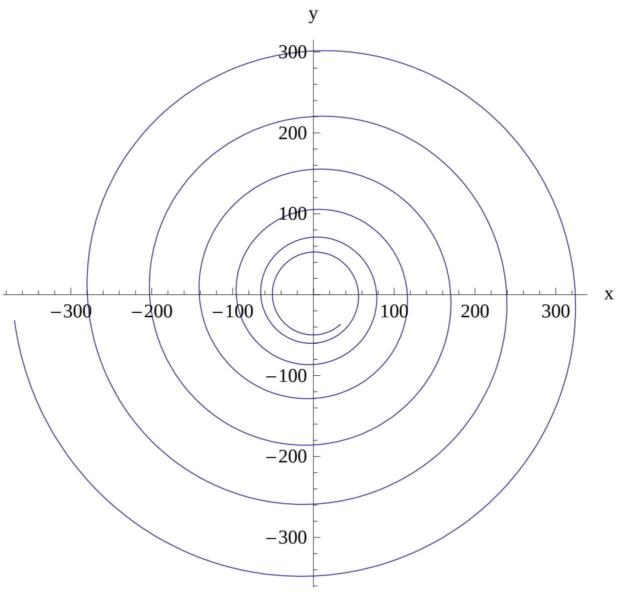
In[22]:=
```
(* y- Komponente der Beschleunigung *)
beschleunigung[t][[2]]
```

Out[22]=
$$2\,\omega \operatorname{Cos}[t\,\omega] \left(\begin{cases} 0 & t<0 \\ -1.6+0.4\,t & 0<t<4 \\ 0. & t==4 \\ 0 & t>4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}\right) - \omega^2 \left(\begin{cases} 0.5+0.2\,(4-t)^2 & 0\le t<4 \\ 0.5 & t\ge 4 \end{cases}\right) \operatorname{Sin}[t\,\omega] + \begin{cases} 0 & t<0 \\ 0.4 & 0<t<4 \\ 0 & t>4 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases} \operatorname{Sin}[t\,\omega]$$

In[23]:=
```
(* z- Komponente der Beschleunigung *)
beschleunigung[t][[3]]
```

Out[23]= 0

In[24]:=
```
(* Zeichne nur die x und y komponente*)
beschleunigung[t];
ParametricPlot[{%[[1]], %[[2]]} /. ω → ω1 /. vz → vz1, {t, tmin, ts}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```

Out[25]=


In[26]:=
```
beschleunigung[t];
ParametricPlot[{%[[1]], %[[2]]} /. ω → ω1 /. vz → vz1, {t, ts, tmax}, AxesLabel → {"x", "y"}]
```

Out[27]=