Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt,
Maria Richter, Bruno Riemenschneider, Eike Verdenhalven

10. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Do. 01.07.2010 bis 8:30 Uhr VOR der Vorlesung in den Briefkasten im ER Gebäude oder online über ISIS

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie alle Namen und Matrikelnummern an. Vermerken Sie bitte nur den Namen des Tutors, bei dem das korrigierte Übungsblatt zurückgegeben werden soll. Wenn Aufgaben mit Hilfe des Computers gelöst werden, dann ist der komplette Quelltext der Abgabe kommentiert beizufügen.

Aufgabe 24 (8 Punkte): *Feld einer homogen geladenen Kugel*

Ein Beispiel für eine kontinuierliche Ladungsverteilung bildet die homogen geladene Kugel mit dem Radius R. Aufgrund der Radialsymmetrie hat das elektrische Feld die Form $\underline{E}(\underline{r}) = E(r)\underline{e}_r$. Die Ladungsdichte der Kugel lautet $\rho(\underline{r}) = \begin{cases} \rho_0 & , r \leq R \\ 0 & , r > R \end{cases}$. Das Gauß'sche Gesetz $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0}$ läßt sich in integraler Form darstellen als :

$$\int_{\partial V} \underline{E}(\underline{r}) d\underline{f} = \int_V \frac{\rho(\underline{r})}{\epsilon_0} d^3 r \,.$$

(a) Berechnen das elektrische Feld $\underline{E}(\underline{r})$ für diese homogen geladene Vollkugel. *Hinweis:* Lösen Sie die beiden Integrale unter Berücksichtigung der gegebenen Symmetrie.

(b) Stellen Sie das Ergebnis für das elektrische Feld $\underline{E}$ grafisch dar.

(c) Zeigen Sie, dass es sich beim elektrischen Feld um ein konservatives Feld handelt.

(d) Berechnen Sie aus dem elektrischen Feld das Potenzial $\phi(r)$ und stellen Sie dieses ebenfalls grafisch dar.

Aufgabe 25 (12 Punkte): *Magnetischer Dipol und* Dirac'sche Deltafunktion

(a) Die Dirac'sche Deltafunktion kann z.B. approximiert werden durch

$$\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} \text{ mit } \epsilon > 0 \quad \text{oder} \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{\epsilon - |x|}{\epsilon^2} \text{ mit } -\epsilon \leq x \leq \epsilon \,.$$

Die Deltafunktion ist dann $\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x)$.

Zeichnen Sie diese Funktionen für verschiedene Werte von ϵ und zeigen Sie jeweils dass gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x) = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

(b) Die Stromdichte in einem Kreisleiter mit Radius a (Umfang $A \equiv 2\pi a$) sei in Kugelkoordinaten gegeben als

$$\underline{j}(\underline{r}) = j_\varphi(\underline{r})\underline{e}_\varphi(\underline{r}) = J \, \delta(\cos\theta) \, \delta(r-a) \, \underline{e}_\varphi \,.$$

Bestimmen Sie die Größe J aus der Stromstärke $I = \frac{1}{A} \int_V j_\varphi(\underline{r}) \, d^3\underline{r}$ durch Integration über das Volumen V des Leiters. Verwenden Sie dazu die folgenden Eigenschaften der *Deltafunktion*

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x) f(x) = f(0)$,

(2) $f \epsilon C^1, f(x_0) = 0, f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow \delta(f(x)) = | f'(x_0) |^{-1} \; \delta(x - x_0)$

Bitte Rückseite beachten!⟶

(c) Berechnen Sie das Vektorpotenzial $\underline{A}(\underline{r})$, das Magnetfeld $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$ und das magnetische Moment $\underline{m}$ aus den Gleichungen

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi}\mu\,\frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3} \qquad \text{mit} \qquad \underline{m} \equiv \frac{1}{2}\int_V \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')\, d^3\underline{r}',$$

indem Sie die vorgegebene Stromdichte $\underline{j}(\underline{r})$ einsetzen.

Klausur: • Donnerstag, den 08.07.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 1058.

Achtung: Die Anmeldung zur Klausur muss bis zum 07.07.2010 11:00 Uhr im Moses-Konto erfolgen.

Vorlesung: • Donnerstags 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201.

Tutorien:

Mo	10–12 Uhr	EW 731	Stefan, Max
Mo	12–14 Uhr	EW 731	Stefan, Max
Mo	12–14 Uhr	FR 0512A	Bruno
Mo	14–16 Uhr	EW 202	Eike
Mo	16–18 Uhr	EW 229	Eike
Di	08–10 Uhr	EW 731	Bruno
Di	12–14 Uhr	EW 731	Maria
Di	16–18 Uhr	EW 226	Maria

Scheinkriterien:
- Mindestens 50% der Übungspunkte.
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Literatur zur Lehrveranstaltung:
- Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
- Rainer Wüst: Mathematik für Physiker und Mathematiker 1 und 2
- Mathemathische Einführungskapitel der Lehrbuchreihen der theoret. Physik, z.B. Greiner, Nolting
- Bronstein: Taschenbuch der Mathematik
- Hermann Schulz: Physik mit Bleistift : das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
- Richard Feynman: Vorlesungen über Physik

Sprechzeiten:

Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225
Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143
Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143
Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143