

Prof. Dr. Harald Engel,
Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt,
Maria Richter, Bruno Riemenschneider, Eike Verdenhalven

3. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Mi. 12.05.2010 bis 18:00 Uhr in den Briefkasten im ER Gebäude oder online über ISIS

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen.

Aufgabe 8 (6 Punkte): Hauptachsentransformation

Die Gleichung

$$(1) \quad 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 6 = 0$$

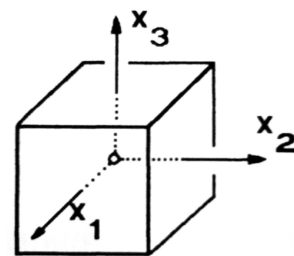
stellt eine Ellipse dar, deren Achsen (aufgrund des gemischten Terms $-4xy$) nicht in Richtung der Koordinatenachsen zeigen.

- (a) Substituieren Sie $\begin{cases} x = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ y = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases}$ und wählen Sie α so, dass in u, v Koordinaten eine Ellipse ohne gemischten Term entsteht (Hinweis: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$). Geben Sie die Ellipsengleichung in u und v sowie die entsprechende Drehmatrix $\underline{\underline{A}}$ an.

- (b) Gleichung (1) lässt sich schreiben als $\underline{x}^T \underline{\underline{M}} \underline{x} + c = 0$ mit $\underline{x}^T = (x, y)$. Bestimmen Sie die symmetrische Matrix $\underline{\underline{M}}$ sowie ihre Eigenwerte und Eigenvektoren. Berechnen Sie weiterhin die Diagonalisierung von $\underline{\underline{M}}$, also das Matrixprodukt $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{A}}$.

Aufgabe 9 (10 Punkte): Drehmatrizen in 3D

Die Matrizen $\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreiben jeweils Drehungen, die den Würfel mit den acht Ecken $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ in sich überführen.



- (a) Berechnen Sie $\det \underline{\underline{V}}$ und $\underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{V}}$ und zeigen Sie, dass $\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}}^{-1}$. Ferner seien die Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Abbildungen $\underline{\underline{V}} \underline{a}$, $\underline{\underline{V}} \underline{b}$ und berechnen Sie $\underline{a} \cdot \underline{b}$ und $(\underline{\underline{V}} \underline{a}) \cdot (\underline{\underline{V}} \underline{b})$.
- (b) Die Drehachse \underline{x} einer Drehmatrix $\underline{\underline{D}}$ ist der Eigenvektor von $\underline{\underline{D}}$ zum Eigenwert 1. Bestimmen Sie die Drehachsen von $\underline{\underline{V}}$ und $\underline{\underline{T}}$.
- (c) Berechnen Sie $\underline{\underline{V}}^2$, $\underline{\underline{V}}^3$, $\underline{\underline{V}}^4$, $\underline{\underline{T}}^2$, $\underline{\underline{T}}^3$. Welche Drehwinkel haben somit $\underline{\underline{V}}$ und $\underline{\underline{T}}$?
- (d) Berechnen Sie $\underline{\underline{V}} \underline{\underline{T}}$ und $\underline{\underline{T}} \underline{\underline{V}}$ sowie die zugehörigen Drehachsen und Drehwinkel.
- (e) Durch geeignete Produkte von $\underline{\underline{V}}$ und $\underline{\underline{T}}$ erhält man alle 24 Drehungen, die den Würfel in sich abbilden. Welche grundsätzlichen Arten von Drehungen gibt es und warum sind es 24?

3. Übung MM SS 10

Aufgabe 10 (4 Punkte): Pauli-Matrizen

Gegeben seien die Pauli-Matrizen

$$\underline{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese stellen in der Quantenmechanik die Wirkung der Drehimpulsoperatoren auf Spin-1/2-Zustände, beispielsweise auf Elektronen, dar.

(a) Zeigen Sie die Relation

$$\underline{\sigma}_i \underline{\sigma}_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \epsilon_{ijk} \underline{\sigma}_k, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

(b) Der Kommutator von zwei Matrizen $\underline{A}, \underline{B}$ ist definiert als

$$[\underline{A}, \underline{B}] = \underline{A}\underline{B} - \underline{B}\underline{A}.$$

Zeigen Sie dass $[\underline{\sigma}_i, \underline{\sigma}_j] = 2i \epsilon_{ijk} \underline{\sigma}_k$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Vorlesung:	<ul style="list-style-type: none"> Donnerstags 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201. 																																			
	Mo 10–12 Uhr EW 731 Stefan, Max																																			
	Mo 12–14 Uhr EW 731 Stefan, Max																																			
	Mo 12–14 Uhr FR 0512A Bruno																																			
Tutorien:	Mo 14–16 Uhr EW 202 Eike																																			
	Mo 16–18 Uhr EW 229 Eike																																			
	Di 08–10 Uhr EW 731 Bruno																																			
	Di 12–14 Uhr EW 731 Maria																																			
	Di 16–18 Uhr EW 226 Maria																																			
Klausur:	<ul style="list-style-type: none"> Donnerstag, den 08.07.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 1058. 																																			
Scheinkriterien:	<ul style="list-style-type: none"> Mindestens 50% der Übungspunkte. Bestandene Klausur. Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien. 																																			
Literatur zur Lehrveranstaltung:	<ul style="list-style-type: none"> Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik Rainer Wüst: Mathematik für Physiker und Mathematiker 1 und 2 Mathematische Einführungskapitel der Lehrbuchreihen der theoret. Physik, z.B. Greiner, Nolting Bronstein: Taschenbuch der Mathematik Hermann Schulz: Physik mit Bleistift : das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler Richard Feynman: Vorlesungen über Physik 																																			
Sprechzeiten:	<table> <thead> <tr> <th>Name</th> <th>Tag</th> <th>Zeit</th> <th>Raum</th> <th>Tel.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prof. Dr. H. Engel</td> <td>Mi.</td> <td>14:30-16:00</td> <td>EW 738</td> <td>79462</td> </tr> <tr> <td>Stefan Fruhner</td> <td>Fr.</td> <td>13:30-14:30</td> <td>EW 627/28</td> <td>27681</td> </tr> <tr> <td>Max Schmitt</td> <td>Do.</td> <td>10:00-11:00</td> <td>EW 708</td> <td>25225</td> </tr> <tr> <td>Maria Richter</td> <td>Di.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Bruno Riemenschneider</td> <td>Mi.</td> <td>15:00-16:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> <tr> <td>Eike Verdenhalven</td> <td>Di.</td> <td>13:00-14:00</td> <td>EW 217</td> <td>26143</td> </tr> </tbody> </table>	Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.	Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462	Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681	Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225	Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143	Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143	Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143
Name	Tag	Zeit	Raum	Tel.																																
Prof. Dr. H. Engel	Mi.	14:30-16:00	EW 738	79462																																
Stefan Fruhner	Fr.	13:30-14:30	EW 627/28	27681																																
Max Schmitt	Do.	10:00-11:00	EW 708	25225																																
Maria Richter	Di.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Bruno Riemenschneider	Mi.	15:00-16:00	EW 217	26143																																
Eike Verdenhalven	Di.	13:00-14:00	EW 217	26143																																