

Prof. Dr. Harald Engel,
 Dipl. Phys. Stefan Fruhner, Dipl. Ing. Maximilian Schmitt,
 Maria Richter, Bruno Riemenschneider, Eike Verdenhalven

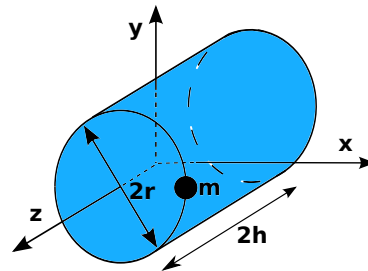
5. Übungsblatt – Mathematische Methoden der Physik

Abgabe: Do. 27.05.2010 bis 8:30 Uhr VOR der Vorlesung in den Briefkasten im ER Gebäude oder online über ISIS

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte! Die Abgabe soll in Dreiergruppen erfolgen. Bitte geben Sie alle Namen und Matrikelnummern an. Vermerken Sie bitte nur den Namen des Tutors, bei dem das korrigierte Übungsblatt zurückgegeben werden soll. Wenn Aufgaben mit Hilfe des Computers gelöst werden, dann ist der komplette Quelltext der Abgabe kommentiert beizufügen.

Aufgabe 13 (10 Punkte): Trägheitstensor

Eine zylindrische Schwungscheibe mit den Maßen $r = h = 1\text{m}$ und der Masse $M = 1\text{kg}$ hat am Rand eine punktförmige Unwucht der Masse $m = 0.5\text{kg}$. In dem skizzierten Koordinatensystem lautet der Trägheitstensor



$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(3r^2 + 4h^2) + mh^2 & 0 & -mrh \\ 0 & \frac{M}{12}(3r^2 + 4h^2) + m(h^2 + r^2) & 0 \\ -mrh & 0 & \frac{M}{2}r^2 + mr^2 \end{pmatrix}.$$

Rotiert die Scheibe mit dem Drehgeschwindigkeitsvektor $\underline{\omega}$, so hat sie die kinetische Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}\underline{\omega}^T \underline{\underline{I}} \underline{\omega}$ und den Drehimpuls $\underline{L} = \underline{\underline{I}} \underline{\omega}$.

- (a) Zeigen Sie mit der Definition des Drehimpulses $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$ und des Impulses $\underline{p} = m\underline{v}$ sowie der Relation $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$, dass gilt:

$$\underline{\underline{I}} = m(\underline{r}^2 \underline{1} - \underline{r} \circ \underline{r}).$$

Die folgenden Aufgabenteile sind mit Mathematica zu lösen! Drucken Sie dazu den kommentierten Quellcode aus bzw. laden Sie die ihn als pdf-Datei hoch. Mathematica ist verfügbar im PC Pool, Raum EW 019/020.

Nützliche Befehle: NMinimize[], NMaximize[], SphericalPlot3D[]

- (b) Berechnen Sie E_{rot} und \underline{L} für Drehungen um die Vektoren $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$.
- (c) Betrachten Sie nun Drehungen um eine beliebige Drehachse

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $E_{rot}(\theta, \phi)$. Für welche Winkel θ und ϕ wird E_{rot} minimal bzw. maximal und wie groß ist E_{rot} jeweils? Geben Sie die entsprechenden Drehachsen an.

- (d) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underline{\underline{I}}$ (*Hauptträgheitsmomente* und *Hauptträgheitsachsen*). Vergleichen Sie dies mit den Rotationsenergien bzw. Drehachsen aus Teil (c).
- (e) Plotten Sie $E_{rot}(\theta, \phi)$.

5. Übung MM SS 10

Bonusaufgabe 14 (10 Zusatzpunkte): Hooke'sches Gesetz

Das Hooke'sche Gesetz der Elastizitätstheorie lautet

$$(1) \quad \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} .$$

Darin ist $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}$ der mechanische Spannungstensor, $\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}$ der Dehnungstensor und $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ der Steifigkeitstensor.

$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ ist ein Tensor vierter Stufe, hat also $3^4 = 81$ Einträge.

- (a) Es gilt $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}^T$ und $\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}^T$. Wieviele unabhängige Einträge hat $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ damit maximal? Gleichung (1) lässt sich dadurch als Vektorgleichung der Form $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}' = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}' \underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}'$ schreiben. Welche Dimension haben die Vektoren $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}'$ und $\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}'$ sowie die Matrix $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}'$?
- (b) Für ein isotropes Material gilt $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ mit den sog. Lamékonstanten λ und μ . Zeigen Sie, dass $C_{ijkl} = C_{klij}$. Geben Sie ferner eine mögliche Darstellung von $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}'$ an.
- (c) Zeigen Sie, dass sich das Hooke'sche Gesetz für ein isotropes Material schreiben lässt als $\underline{\underline{\underline{\underline{\sigma}}}} = \lambda Sp(\underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}) \underline{\underline{\underline{\underline{1}}}} + 2\mu \underline{\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}}$, sprich das sich die 81 Einträge aus $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ auf 2 Materialkonstanten reduzieren. Die Konstante μ nennt man auch Schubmodul G , während das bekannte Elastizitätsmodul durch $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ gegeben ist.

Vorlesung:	• Donnerstags 8:15 Uhr – 9:45 Uhr in EW 201.
	Mo 10–12 Uhr EW 731 Stefan, Max
	Mo 12–14 Uhr EW 731 Stefan, Max
	Mo 12–14 Uhr FR 0512A Bruno
Tutorien:	Mo 14–16 Uhr EW 202 Eike
	Mo 16–18 Uhr EW 229 Eike
	Di 08–10 Uhr EW 731 Bruno
	Di 12–14 Uhr EW 731 Maria
	Di 16–18 Uhr EW 226 Maria
Klausur:	• Donnerstag, den 08.07.2010, von 08:00 – 10:00 Uhr in H 1058.
Scheinkriterien:	• Mindestens 50% der Übungspunkte.
	• Bestandene Klausur.
	• Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.
Literatur zur Lehrveranstaltung:	
	• Siegfried Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik
	• Rainer Wüst: Mathematik für Physiker und Mathematiker 1 und 2
	• Mathematische Einführungskapitel der Lehrbuchreihen der theoret. Physik, z.B. Greiner, Nolting
	• Bronstein: Taschenbuch der Mathematik
	• Hermann Schulz: Physik mit Bleistift : das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler
	• Richard Feynman: Vorlesungen über Physik
Sprechzeiten:	
	Name Tag Zeit Raum Tel.
	Prof. Dr. H. Engel Mi. 14:30-16:00 EW 738 79462
	Stefan Fruhner Fr. 13:30-14:30 EW 627/28 27681
	Max Schmitt Do. 10:00-11:00 EW 708 25225
	Maria Richter Di. 15:00-16:00 EW 217 26143
	Bruno Riemenschneider Mi. 15:00-16:00 EW 217 26143
	Eike Verdenhalven Di. 13:00-14:00 EW 217 26143