4. Matrizen und Determinanten

Eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist ein Schema von $m \times n$ Zahlen a_{ij} bestehend aus $i = 1,2,..,n$ Zeilen und $j = 1,2,..,m$ Spalten

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \qquad \text{(Matrix "vom Typ } m \times n\text{")}$$

Im Folgenden seien die $\rightarrow$ Matrixelemente a_{ij} reelle Zahlen sowie m und n endlich.

4.1 Rechenregeln

<u>Gleichheit</u> von zwei Matrizen: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$, wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle i, j.

<u>Summe</u> zweier Matrizen gleichen Typs: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle i, j,

wobei $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}} \rightarrow$ Addition von Matrizen kommutativ.

<u>Multiplikation</u> einer Matrix <u>mit einer Zahl</u>: $\alpha\, \underline{\underline{A}} = (\alpha\, a_{ij})$ (<u>alle</u> Elemente mit α multiplizieren).

Die zu $\underline{\underline{A}}$ <u>transponierte Matrix</u> $\underline{\underline{A}}^T$ mit $a_{ij}{}^T = a_{ji}$ entsteht durch Vertauschung der Zeilen und Spalten von $\underline{\underline{A}}$.

Vektoren können als Matrizen aufgefasst werden, z.B. im R^3

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \text{ und } \underline{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{(Zeilen- bzw. Spaltenvektor).}$$

4.2 Multiplikation von Matrizen

Sei $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})$ eine Matrix vom Typ $m_A \times n_A$ und $\underline{\underline{B}} = (b_{ij})$ eine Matrix vom Typ $m_B \times n_B$.
Nur wenn $\underline{\underline{A}}$ genauso viele Spalten wie $\underline{\underline{B}}$ Zeilen hat ($n_A = m_B$), ist das Produkt beider Matrizen definiert, wobei gilt

$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$ (Summenkonvention!) :

Paarweise werden die Elemente der i-ten Zeile von $\underline{\underline{A}}$ mit den Elementen der k-ten Spalte von $\underline{\underline{B}}$ multipliziert und addiert. M.a.W.: Das Matrixelement c_{ij} ist das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von $\underline{\underline{A}}$ und dem j-ten Spaltenvektor von $\underline{\underline{B}}$. Die Produktmatrix hat m_A Zeilen und n_B Spalten.
Im Gegensatz zur Addition ist die Multiplikation von Matrizen i.a. <u>nicht</u> kommutativ!

■ $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},\ \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3+8 \end{pmatrix} = \underbrace{(11)}_{1\times1-\text{Matrix}},\ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times2-\text{Matrix}}$$

Für nichtquadratische Matrizen verhindert oft schon die Bedingung $n_A \neq n_B$ die Vertauschbarkeit. Dennoch kommutieren auch quadratische Matrizen i.a. nicht.

■ $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},\ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Da multiplikativ vertauschbare Matrizen etwas Besonderes sind, definiert man:

Die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ heißen vertauschbar (kommutieren), wenn $[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}] := \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = 0$.

Potenzen $\underline{\underline{A}}^2, ..., \underline{\underline{A}}^n$ können nur für quadratische Matrizen $\underline{\underline{A}}$ gebildet werden. Dabei gilt

$$\underline{\underline{A}}^2 := \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}} = (a_{ik} a_{kj}), \; e^{\underline{\underline{A}}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{\underline{A}}^n \text{ usw.}$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren lässt sich als Matrixmultiplikation darstellen, z.B.

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) = \underline{\underline{A}}, \; \underline{b} = (b_1, b_2, b_3) = \underline{\underline{B}}, \; \underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^T .$$

4.3 Determinante einer quadratischen $n \times n$ - Matrix

Determinante der quadratischen Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist die Zahl

$$\mathrm{Det}(\underline{\underline{A}}) \equiv \left|\underline{\underline{A}}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := a_{11} A_{11} - a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} - / + \ldots a_{1n} A_{1n}$$

mit den $\rightarrow$ Unterdeterminanten A_{ik}. A_{ik} ist die Determinante n-1 ten Grades, die aus der Determinante von $\underline{\underline{A}}$ durch Streichung der i-ten Zeile und der k-ten Spalte entsteht.

■ Nach dieser Definition berechnet sich z.B. die Determinante 3-ten Grades wie folgt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Für Determinanten 3. Ordnung (und nur für diese!) ist die häufig verwendete Sarrus´sche Regel gültig:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Terme mit positivem (negativem) Vorzeichen entstehen aus dem wie oben erweiterten Schema durch Produktbildung entlang und parallel zur Haupt- (Neben-) Diagonalen (durchgezogene bzw. unterbrochene Linien), man verifiziert leicht das obige Ergebnis.

4.4 Inverse einer quadratischen Matrix

Rückwärtsdrehung

Als inverse oder Umkehrmatrix der quadratischen Matrix $\underline{\underline{A}}$ wird die Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ bezeichnet, die der Relation

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}} \equiv \underline{\underline{1}} := (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \text{ Einheitsmatrix.}$$

genügt. Für die Komponenten x_{ij} von $\underline{\underline{A}}^{-1}$ findet man

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = (x_{\underset{\uparrow}{ij}}) \quad \text{mit} \quad x_{\underset{\uparrow}{ji}} = \frac{(-1)^{i-j} A_{ij}}{\mathrm{Det}(\underline{\underline{A}})}, \qquad \mathrm{Det}(\underline{\underline{A}}) \neq 0 \ ,$$

wobei A_{ij} genau wie oben diejenige Unterdeterminante ist, die aus Det ($\underline{\underline{A}}$) durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht. Die zu $\underline{\underline{A}}$ inverse Matrix existiert genau dann, wenn die die Determinante von $\underline{\underline{A}}$ ungleich Null ist; solche Matrizen heißen regulär im Unterschied zu den singulären Matrizen $\underline{\underline{A}}$, deren Determinante gleich Null ist.

■ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\left|\underline{\underline{A}}^{-1}\right| = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2 \neq 0,\ A_{11} = 4,\ A_{12} = 3,\ A_{21} = 2,\ A_{22} = 1 \ \rightarrow\ \underline{\underline{A}}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Man überprüft leicht, dass die Relationen $\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$ tatsächlich erfüllt sind.

■ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar, denn $\mathrm{Det}(\underline{\underline{A}}) = 0$ und damit $\underline{\underline{A}}$ singulär.

4.5 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen. Diagonalisierung einer Matrix

Die Eigenwerte (EW) λ (Zahlen) und die Eigenvektoren (EV) $\underline{x}$ der $n\times n$ Matrix $\underline{\underline{A}}$ sind definiert über das lineare Gleichungssystem

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x} = \lambda\,\underline{x}\,.$$

Es besitzt genau dann nichttriviale Lösungen $\underline{x} \neq 0$, wenn λ Lösung der charakteristische Gleichung

$$\mathrm{Det}(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}) = 0$$

bzw. Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist. Der zu einem EW λ korrespondierende EV wird durch Lösung des Gleichungssystems

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda)\cdot\underline{x} = 0$$

ermittelt. Man nennt die Matrix $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar, wenn die Vielfachheit der einzelnen Nullstellen des charakteristischen Polynoms gleich der Anzahl der dieser Nullstelle entsprechenden linear unabhängigen Lösungsvektoren $\underline{x}$ ist.

Sei $\underline{\underline{A}}$ eine $n \times n$ – Matrix mit n linear unabhängigen EV $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$. Wir verwenden die EV von $\underline{\underline{A}}$ als Spalten einer Matrix $\underline{\underline{C}} \equiv (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n)$. Es gilt

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}} = \left(\underline{\underline{A}}\underline{x}_1, \underline{\underline{A}}\underline{x}_2, \ldots, \underline{\underline{A}}\underline{x}_n\right) = \left(\lambda_1 \underline{x}_1, \lambda_2 \underline{x}_2, \ldots, \lambda_n \underline{x}_n\right) = \left(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n\right) \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}},$$

$$\text{mit } \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{C}}$$

d.h. mit $\underline{\underline{C}}$ lässt sich die Matrix $\underline{\underline{A}}$ auf Diagonalform transformieren.

5. Koordinatentransformationen (KT)

Motivation/Frage: Welchen Einfluss haben KT auf die Komponentendarstellung von Vektoren?

5.1 Drehung eines Koordinatensystems (KSs), KS → KS'

Vektor $\underline{r} = x_i \underline{e}_i$ bzgl. Dreibein $\underline{e}_i$, bzgl. Dreibein $\underline{e}_i'$ sei $\underline{r} = x_i' \underline{e}_i'$.

(ausführlich ohne Summenkonvention $\underline{r} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 = x_1'\underline{e}_1' + x_2'\underline{e}_2' + x_3'\underline{e}_3'$.)

Lage der "neuen" (transformierten) EHV, $\underline{e}_i'$, im "alten" KS

$$\underset{\uparrow}{\underline{e}_i'} = \underset{\uparrow\uparrow\uparrow}{a_{ij}} \, \underset{\uparrow\uparrow}{\underline{e}_j}, \quad \Big| \cdot \underline{e}_k \qquad \text{also} \quad \underline{\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k} = a_{ij} \, \underline{e}_j \cdot \underline{e}_k = a_{ij} \, \delta_{jk} = \underline{a_{ik}} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Mit der Matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})$ kann die Drehung zahlenmäßig beschrieben werden → Drehmatrix.

Beachte: Nicht jede quadratische (nichtsymmetrische) Matrix beschreibt eine Drehung: Soll die 3 x 3 Matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})$ Drehmatrix im R^3 sein, müssen die Matrixelemente folgende Bedingungen erfüllen:

(i) $|a_{ik}| \le 1$, wegen $a_{ik} = \cos\varphi_{ik}$

(ii) $a_{ii}^2 = \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_i' = 1, \; i = 1,2,3$ Normierung der "neuen" EHV, z.B. $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$

(iii) $\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j' = 0 = a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3}, \; i \neq j = 1,2,3$

Zusammen folgen aus der Orthonormalität der "neuen" EHV (ii), (iii) die Bedingungen

$a_{ik}a_{jk} = (\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j') = \delta_{ij}, \; i,j = 1,2,3$ $\rightarrow$ Orthonormalität der Zeilen

Analoge Überlegungen für die "alten" EHV führen auf die Bedingungen

$a_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij}$, i, j = 1, 2, 3 $\rightarrow$ Orthonormalität der Spalten

Jeder Drehung im R^3 kann eine Drehmatrix mit diesen Eigenschaften zugeordnet werden.

Umgekehrt definiert jede Matrix mit orthonormierten Zeilen und Spalten eine Drehung des KS, wenn zusätzlich die Bedingung

$$\mathrm{Det}(a_{ij}) = 1$$

erfüllt ist. Sie sichert, dass bei Drehung aus einem Rechtssystems kein Linkssystem entstehen kann, dessen Determinantenvolumen (s.u.) gleich -1 ist.

Einschub: Volumen eines Parallelepiped aus drei (nicht in einer Ebene liegenden) Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$

$$V(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

■ z.B. $\underbrace{V(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)}_{\text{Rechtssystem}} = \underline{e}_1\cdot(\underline{e}_2\times\underline{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, aber

$$\underbrace{V(\underline{e}_1,\underline{e}_2,-\underline{e}_3)}_{\text{Linkssystem}} = \underline{e}_1\cdot(\underline{e}_2\times-\underline{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

5.2 Transformationsformeln für Vektoren

Aus $\underline{r} = x_i \underline{e}_i = x_i' \underline{e}_i' \quad | \cdot \underline{e}_k'$

folgt

$x_k' = x_i \underline{e}_i \cdot \underline{e}_k' = a_{ki} x_i$ (erster Index kommt von '!) bzw. $\underline{x_i' = a_{ij} x_j}$.

Nach Multiplikation mit $\underline{e}_k$ ergibt sich analog $x_k = x_i' \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_k = x_i' a_{ik}$, d.h. $\underline{x_i = a_{ji} x_j'}$.

Offensichtlich gilt $x_i' = a_{ij} x_j = a_{ij} (a_{kj} x_k') = a_{ij} a_{kj} x_k'$; daraus folgt wieder die Bedingung $a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$ für die Orthonormalität der Zeilen.

Kompakte Schreibweise mit Hilfe der Drehmatrix $\underline{\underline{D}} = (d_{ij}) = (\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j)$:

$\underline{x}' = \underline{\underline{D}}\, \underline{x}$ und $\underline{x} = \underline{\underline{D}}^{-1}\, \underline{x}'$, bzw. $x_i = d^{-1}{}_{ij} x_j' = d_{ji} x_j'$) **(A)**

Man verifiziert leicht, dass das innere Produkt zweier Vektoren invariant gegen Drehungen ist (wir wissen aus dem Namen und der Definition, dass es ein Skalar ist):

$$\underline{a}' \cdot \underline{b}' = a_i' \cdot b_i' = (d_{ij} a_j)(d_{ik} b_k) = \underbrace{d_{ij} d_{ik}}_{\delta_{jk}} a_j b_k = a_k b_k = \underline{a} \cdot \underline{b} \ .$$

<u>Damit sind die Länge eines Vektors und die Winkel zwischen zwei Vektoren invariant gegen Drehungen deKS (gegen Verschiebungen des Koordinatenursprungs sowieso).</u>

Das letzte Gleichheitszeichen in **(A)** beruht darauf, dass Drehmatrizen <u>orthogonale Matrizen</u> sind für die gilt

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{1}} = (\delta_{ij}), \text{ also } \underline{\underline{D}}^T = \underline{\underline{D}}^{-1} \ .$$

$\rightarrow$ inverse und transponierte Matrix stimmen überein.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_3 \end{pmatrix} \text{"="} \begin{pmatrix} — & \underline{e}_1' & — \\ — & \underline{e}_2' & — \\ — & \underline{e}_3' & — \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}^T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{e}_1' & \underline{e}_2' & \underline{e}_3' \\ | & | & | \end{pmatrix}, \text{ also } \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^T = \begin{pmatrix} — & \underline{e}_1' & — \\ — & \underline{e}_2' & — \\ — & \underline{e}_3' & — \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{e}_1' & \underline{e}_2' & \underline{e}_3' \\ | & | & | \end{pmatrix} = \left(\underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j'\right) = (\delta_{ij}) .$$

Die einfachsten Drehmatrizen ergeben sich, wenn man um eine der Achsen des "alten" Koordinatensystems dreht.

■ Drehung um $\underline{e}_1$ (x-Achse), Drehwinkel φ

Basis von KS / "altes" Dreibein	Basis von KS'
$\underline{e}_1 = (1, 0, 0\ )$	$\underline{e}_1' = (1,0,0)$ $(\rightarrow$ Drehachse)
$\underline{e}_2 = (0, 1, 0\ )$	$\underline{e}_2' = (0, \cos\varphi, \sin\varphi)$
$\underline{e}_3 = (0, 0, 1\ )$	$\underline{e}_3' = (0, -\sin\varphi, \cos\varphi)$

$$\underline{\underline{D}} \equiv \underline{\underline{D}}_{(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_1' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_2' \cdot \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_1 & \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_2 & \underline{e}_3' \cdot \underline{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

■ Für Drehungen um $\underline{e}_2$ (y-Achse) und $\underline{e}_3$ (z-Achse) findet man analog

$$\underline{\underline{D}}_{(y,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{D}}_{(z,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

5.3 Drehmatrix, Drehachse und Drehwinkel

Zwei typische Aufgabenstellungen im Zusammenhang mit Drehungen sind:

A) Gegeben ist die Drehmatrix, gesucht werden die entsprechende Drehachse und der Drehwinkel.

B) Umgekehrt: Zu einer gegebene Drehachse und dem Drehwinkel um diese Achse ist die Drehmatrix zu errechnen.

Lösung des Problems A)

Ein Vektor $\underline{b}$ entlang der Drehachse ist invariant unter der Drehung, also Eigenvektor der Drehmatrix zum Eigenwert 1

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{b} = \underline{b}.$$

Das sind drei Gleichungen zur Bestimmung der <u>Komponenten der Drehachse</u> b_1, b_2 und b_3. Beispiel:

■ Gegeben sei die Matrix

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Da $$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{1}}$$

und $$\mathrm{Det}(\underline{\underline{D}}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\left[0 + 2 + 2 - (-2 - 2)\right] = 1$$

ist diese Matrix eine Drehmatrix. Der Eigenvektor zum Eigenwert 1 ergibt sich aus

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Das sind drei Gleichungen

$$\frac{1}{2}\left(b_1 + b_2 + \sqrt{2}\, b_3\right) = b_1 \quad \to \; - b_1 + b_2 + \sqrt{2}\, b_3 = 0$$
$$\frac{1}{2}\left(b_1 + b_2 - \sqrt{2}\, b_3\right) = b_2 \quad \to \quad b_1 - b_2 - \sqrt{2}\, b_3 = 0$$
$$\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\, b_1 + \sqrt{2}\, b_2\right) = b_3 \quad \to \; - b_1 + b_2 - \sqrt{2}\, b_3 = 0$$

für die Komponenten der Drehachse. Die erste Gleichung kann ersatzlos gestrichen werden, da sie durch Multiplikation der zweiten mit (-1) entsteht, also nicht unabhängig ist. Ursache: Mit $\underline{b}$ sind offensichtlich alle Vektoren $\alpha\, \underline{b}$ Eigenvektoren von $\underline{\underline{D}}$. Der Betrag b des Vektors $\underline{b}$ kann also aus $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{b} = \underline{b}$ nicht bestimmt werden, demzufolge sind nicht alle Bestimmungsgleichungen für die b_i unabhängig. Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt $b_3 = 0$, $b_1 = b_2$, also

$$\underline{b} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

"Probe": $$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{b} = \frac{b_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{b_1}{2} \begin{pmatrix} 1+1+0 \\ 1+1+0 \\ -\sqrt{2}+\sqrt{2}+0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung des <u>Drehwinkel</u>s φ aus der gegebenen $\underline{\underline{D}}$ ist die Relation

$$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{D}}) = 1 + 2\cos\varphi$$

nützlich. Die Spur einer quadratischen Matrix, $\underline{\underline{A}}$, ist die Summe ihrer Diagonalelemente, d.h. $\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}) = a_{ii}$. Bei Spurbildung einer Produktmatrix (Definition der Matrix-Multiplikation beachten) sind zyklische Vertauschungen der Faktoren zulässig, z.B.

$$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}) = a_{ij}\, b_{jk}\, c_{ki} = c_{ki}\, a_{ij}\, b_{jk} = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})$$

(auch wenn $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{C}}$ nicht kommutieren).

Stellt man daher die Matrix $\underline{\underline{D}}$ der Drehung um eine Achse mit Richtung $\underline{b}$ und Drehwinkel φ in der Form $\underbrace{\underline{\underline{D}}}_{\varphi \text{ um } \underline{b}} = \underbrace{\underline{\underline{D}}_0}_{\underline{e}_3 \text{ in } \underline{b}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{D}}_{(z,\varphi)}}_{\varphi \text{ um } \underline{e}_3} \cdot \underbrace{\underline{\underline{D}}_0}_{\underline{b} \text{ in } \underline{e}_3}$ ($\underline{\underline{D}}_0$ - Matrix derjenigen Drehung, welche die Drehachse $\underline{b}$ in die Richtung der z-Achse überführt) dar, erkennt man sofort, dass

$$\mathrm{Sp}(\underline{\underline{D}}) = \mathrm{Sp}(\underline{\underline{D}}_0^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{D}}_{(z,\varphi)} \cdot \underline{\underline{D}}_0) = 1 + 2\cos\varphi$$

ist. Diese Bestimmungsgleichung für φ hat im Intervall $0 \le \varphi \le 2\pi$ zwei Lösungen. Ein eindeutiger Drehwinkel bei gegebenem $\underline{\underline{D}}$ ergibt sich aus

$$\sin\varphi = \underline{e} \cdot \left(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{f} \times \underline{f}\right),$$

wobei $\underline{f}$ ein beliebiger EHV ⊥ auf dem EHV $\underline{e}$ in Richtung der Drehachse ist (also $\underline{f}^2 = 1$, $\underline{e} = \frac{1}{b}\underline{b}$, $\underline{e} \cdot \underline{f} = 0$. Beispiel:

- Sei $\underline{e} = \underline{e}_3$, d.h. $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_{(z,\varphi)}$. Für $\underline{f}$ kann dann z.B. $\underline{e}_1$ gewählt werden, also

$$\underline{e}_3 \cdot \left(\underline{\underline{D}}_{(z,\varphi)} \cdot \underline{e}_1 \times \underline{e}_1\right) = \underline{e}_3 \cdot \left(\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \underline{e}_1 = \underline{e}_3 \cdot \left(\cos\varphi, -\sin\varphi, 0\right) \times \underline{e}_1$$

$$= \underline{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{e}_3 \cdot \left(+1 \begin{vmatrix} \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ -\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \right) = \underline{e}_3 \cdot \left(-(-\sin\varphi)\underline{e}_3\right) = \sin\varphi .$$

Lösung des Problems B)

Sind die Richtung der Drehachse durch $\underline{e} = \frac{1}{b}\underline{b}$ und der Drehwinkel φ gegeben, lässt sich die Drehmatrix in folgender Form darstellen:

$$\underline{\underline{D}} = \cos\varphi\ \underline{\underline{1}} + (1-\cos\varphi)\ \underline{e}\circ\underline{e} - \sin\varphi\ \underline{e}\times$$

Dabei ist $\underline{e}\circ\underline{e}$ die Matrix mit den Elementen $e_i e_k$, also $(\underline{e}\circ\underline{e})_{ik} := e_i e_k$ (das sogenannte dyadische Produkt der beiden Vektoren). Wirkt die Matrix (der Operator) $\underline{\underline{D}}$ auf einen Vektor $\underline{a}$ mit den Komponenten (a_1, a_2, a_3), ist im letzten Term

$$\underline{e}\times\underline{a} = \begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

zu berücksichtigen, wobei u,v und w die Komponenten von $\underline{e}$ sind ($u^2 + v^2 + w^2 = 1$).

■ Im Fall einer Drehung um die z-Achse mit Drehwinkel φ ist $\underline{e} = \underline{e}_3$ und man erhält

$$\underline{\underline{D}} = \cos\varphi\ \underline{\underline{1}} + (1-\cos\varphi)\ \underline{e}\circ\underline{e} - \sin\varphi\ \underline{e}\times = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{D}}_{(z,\varphi)}$$

(überprüfen!).